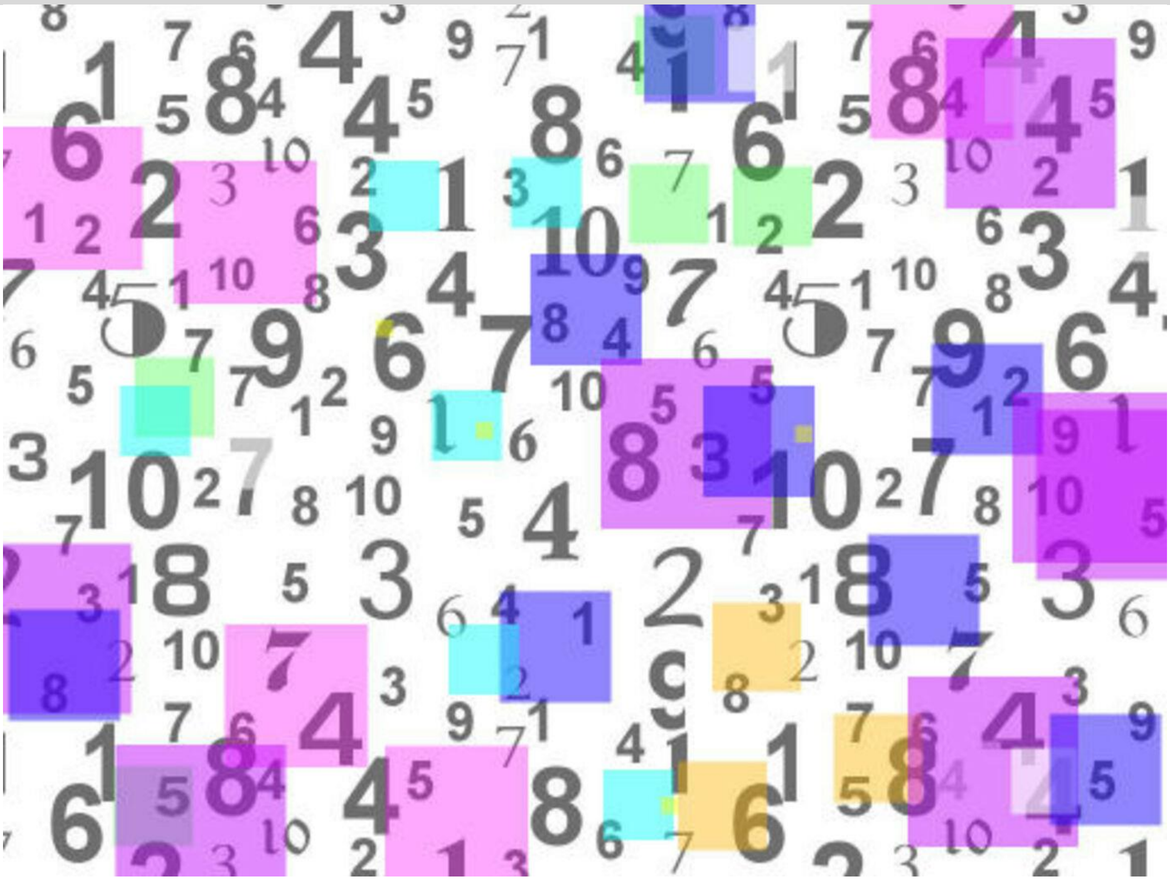
Э.З. Жарлыгасова,

А.Е. Нургельдина

Задачник-практикум по теории чисел



Костанай, 2024

Министерство науки и высшего образования Республики Казахстан
Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы
Факультет машиностроения, энергетики и информационных технологий

Э.З. Жарлыгасова
А.Е. Нургельдина

Задачник-практикум по теории чисел

Учебно-методическое пособие

Костанай, 2024

УДК 511(076.1)

ББК 22.13я7
Ж 35

Авторы:
Жарлыгасова Эльмира Закировна – старший преподаватель кафедры математики и физики факультета машиностроения, энергетики и информационных технологий КРУ им.А.Байтурсынова,
Нургельдина Асель Ермековна – старший преподаватель кафедры математики и физики факультета машиностроения, энергетики и информационных технологий КРУ им.А.Байтурсынова.

Рецензенты:
Джаманбалин Кадыргали Коныспаевич – доктор физико-математических наук, профессор ВАК Костанайского социально-технического университета имени академика З.Алдамжарова;
Утемисова Анар Алтаевна - к.п.н., и.о. ассоциированного профессора, заведующая кафедрой математики и физики факультета машиностроения, энергетики и информационных технологий КРУ им.А.Байтұрсынұлы;
Ысмағұл Роза Сапабекқызы - к.ф.-м.н., и.о. профессора кафедры математики и физики факультета машиностроения, энергетики и информационных технологий КРУ им.А.Байтұрсынұлы.

Жарлыгасова Э.З., Нургельдина А.Е.
Задачник-практикум по теории чисел: Учебно-методическое пособие. - Костанай: КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы, 2024.- 84 с.

ISBN 978-601-356-382-4

Это учебно-методическое пособие предназначено для студентов ВУЗов и колледжей, изучающих основы теории чисел, и охватывает ключевые темы, необходимые для глубокого понимания предмета. В данное УМП включены теория и задачи по темам делимость целых чисел и основы теории делимости, НОД, НОК, простые числа, функция Эйлера и конечные цепные дроби.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов вузов, колледжей, изучающих дисциплину «Теория чисел».

УДК 511(076.1)
ББК 22.13я7

Утверждено и рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом Костанайского регионального университета имени Ахмет Байтұрсынұлы, 29.05.2024 г. протокол № 3

ISBN 978-601-356-382-4

Содержание

Введение

Теория чисел – одна из древнейших и наиболее фундаментальных областей математики, занимающаяся изучением свойств и закономерностей целых чисел. Это учебно-методическое пособие предназначено для студентов ВУЗов и колледжей, изучающих основы теории чисел, и охватывает ключевые темы, необходимые для глубокого понимания предмета.

Начнем с основополагающего понятия делимости чисел, которое является отправной точкой для многих дальнейших концепций. Рассмотрим свойства делимости и научимся определять, когда одно число делится на другое без остатка. Важной задачей в этом контексте является нахождение наибольшего общего делителя (НОД) двух чисел. Для этого мы изучим Алгоритм Евклида – один из старейших и наиболее эффективных алгоритмов, использующий метод последовательных делений для нахождения НОД.

Продвигаясь дальше, мы обсудим наименьшее общее кратное (НОК) и взаимосвязь между НОД и НОК, что позволит нам лучше понимать структуру свойства чисел. Важное место занимает понятие взаимно простых чисел, которые не имеют общих делителей, кроме единицы. Эти числа играют ключевую роль в различных аспектах теории чисел и их применениях.

Числовые функции, такие как число натуральных делителей числа, сумма всех натуральных делителей числа и функция Эйлера также будут подробно рассмотрены. Мы исследуем, как функция Эйлера вычисляет количество чисел, взаимно простых с данным числом, и изучим ее важные свойства и применения. В этой связи мы также изучим теоремы Эйлера и Ферма, которые представляют глубокие инсайты в структуру и свойства чисел.

Еще одной увлекательной темой являются конечные цепные дроби, которые позволяют представлять действительные числа в виде последовательности целых чисел. Этот метод имеет не только теоретическую ценность, но и практические приложения в различных областях математики и компьютерных наук.

Наша цель – не только передать основные знания и навыки, но и развить у студентов способность самостоятельному исследованию и решению сложных задач в области теории чисел. Каждый раздел пособия снабжен примерами и упражнениями, способствующему усвоению материала и развитию аналитического мышления.

Изучение теории чисел требует, как логического мышления, так и творческого подхода. Мы надеемся, что это пособие поможет вам освоить основные понятия и методы теории чисел, вдохновит на дальнейшие исследования и откроет перед вами удивительный мир числовых закономерностей.

1. Отношение делимости в кольце Z

1.1 Отношение делимости в кольце Z

В этом разделе мы рассмотрим свойства отношения делимости в множестве Z.

Определение. Целое число a делится на целое число b, если существует такое целое число c, что $a = b \cdot c$.

Число a называется ***делимым***, b – ***делителем и*** c – ***частным.***

Если a делится на b, то пишут $a \vdots b$ (a кратно b).

Обратным к отношению $a \vdots b$ является отношение «b делит a», которое обозначают так: $b|a$.

Отношение делимости $a \vdots b$ является бинарным отношением в Z. Оно обладает следующими свойствами:

1) ***Отношение делимости рефлексивно***, т.е. для любого $a \in Z$ имеем $a \vdots a$.

Это следует из того, что $a = a \cdot 1$ и $1 \in Z$.

2) ***Отношение делимости транзитивно***, т.е. из $a \vdots b$ и $b \vdots c$ следует $a \vdots c$.

Действительно, так как $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то существуют такие целые числа q и t, что $a = b \cdot q$ и $b = c \cdot t$. Но тогда $a = b \cdot q = (c \cdot t) \cdot q = c \cdot (t \cdot q)$. Так как произведение целых чисел – целое число, то $t \cdot q \in Z$, и поэтому $a \vdots c$.

3) ***Если*** $a \vdots b$ ***, то*** $(-a) \vdots b$ ***,*** $a \vdots (-b)$ ***и*** $(-a) \vdots (-b)$ ***, т.е. отношение делимости сохраняется при изменении знаков делимого и делителя.***

В самом деле, если $a \vdots b$, то $a = b \cdot q$, где $q \in Z$, а тогда $-a = b \cdot (-q)$, $a = (-b) \cdot (-q)$, $-a = (-b) \cdot q$.

4) ***Если*** $a \vdots c$ ***и*** $b \vdots c$***, то*** $(a+b) \vdots c$***.***

В самом деле, так как $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то существуют такие целые числа q и t, что $a = c \cdot q$ и $b = c \cdot t$. Но тогда $a + b = cq + ct = c(q+t)$. Так как $q + t$ – целое число, то $a + b$ делится на c.

Точно так же доказывается, что из $a \vdots c$, $b \vdots c$ следует $(a-b) \vdots c$.

5) ***Если*** $a \vdots c$ ***и*** $b \in Z$***, то*** $(ab) \vdots c$.

В самом деле, так как $a \vdots c$, то существует $q \in Z$ такое, что $a = cq$. Но тогда $ab = (cq)b = c(qb)$. Так как $qb \in Z$, то $(ab) \vdots c$.

Следствие 1. *Если* $a_1 \vdots c_1, \ldots, a_n \vdots c_n$, то для любых целых цисел $r_1, \ldots, r_n$ имеем $(r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n) \vdots c$.

Следствие 2. *Если числа* $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ *делятся на* c *и* $r_1, \ldots, r_n$, $s_1, \ldots, s_m$ *- целые числа, то из* $r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n = s_1 b_1 + \ldots + s_m b_m + b_{m+1}$ *следует, что* $b_{m+1} \vdots c$.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$b_{m+1} = r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n - s_1 b_1 - \ldots - s_m b_m,$$

и воспользоваться сдедствием 1.

Отметим, что утверждения, обратные 4) и 5), ложны: *из делимости суммы не вытекает делимость слагаемых, а из делимости произведения не вытекает делимость сомножителей.*

Например, 32+43=75 – делится на 25, но ни 35, ни 43 не делится на 25; 12·15=180 – делится на 60, а 12, ни 15 не деляся на 60.

6) ***Если*** $a \vdots c$ ***, а*** b ***не делится на*** c ***, то*** $a \pm b$ ***не делится на*** c ***.***

В самом деле, если бы $(a+b) \vdots c$, то из $a \vdots c$ вопреки условию следовало бы, что и $b \vdots c$.

7) ***Нуль делится на любое число*** b ***.***

В самом деле, $0 = b \cdot 0$. Частное от деления нуля на b при $b \neq 0$ равно нулю.

8) ***Любое число*** a ***делится на 1.***

В самом деле, $a = 1 \cdot a$.

9) ***Если*** $a \neq 0$***, то не существует такого*** q***, что*** $0 \cdot q = a$ ***.***

Поэтому ни одно число $a \neq 0$ не делится на 0. С другой стороны, для любого $q \in Z$ имеем: $0 \cdot q = 0$. Поэтому частное 0:0 не определено однозначно. Кратко говоря: ***деление на нуль невозможно.***

10) ***Если*** $a \vdots b$***, то*** $|a| \geq |b|$***.***

В самом деле, $a = b \cdot q$, и поэтому $|a| = |b| \cdot |q| \geq |b|$.

Следствие 1. Если $1 \vdots a$***, то либо*** $a = 1$***, либо*** $a = -1$***.***

В самом деле, $1 \geq |a|$, но поскольку a – целое число, отличное от нуля, то $|a| \geq 1$. Значит, $|a| = 1$ и $a = \pm 1$.

Следствие 2. Если $a \vdots b$ ***и*** $b \vdots a$***, то либо*** $a = b$***, либо*** $a = -b$***.***

В самом деле, из $a \vdots b$ следует, что $|a| \geq |b|$, а из $b \vdots a$, что $|b| \geq |a|$. Значит, $|a| = |b|$ и $a = b$, или $a = -b$.

1 Пример. При каких целых n $\left(n^3 + n^2 - 3n + 7\right) \vdots (n-2)$

Решение. $n^3 + n^2 - 3n + 7 = n^2 + 3n + 3 + \dfrac{13}{n-2}$, так как

$$
\begin{array}{r|l}
n^3 + n^2 - 3n + 7 & n-2 \\
\cline{2-2}
-\ n^3 - 2n^2 \qquad\qquad & n^2 + 3n + 3 \\
\cline{1-1}
3n^2 - 3n + 7 & \\
-\ 3n^2 - 6n \qquad & \\
\cline{1-1}
3n + 7 & \\
-\ 3n - 6 & \\
\cline{1-1}
13 &
\end{array}
$$

Отсюда, $13 \vdots (n-2)$, значит $n - 2 = \pm 1;\quad \pm 13$.

Если $n - 2 = 1$, то $n = 3$, если $n - 2 = -1$, то $n = 1$, если $n - 2 = 13$, то $n = 15$, если $n - 2 = -13$, то $n = -11$.

Ответ: $\{-11;\ \ 1;\ \ 3;\ \ 15\}$.

2 Пример. Доказать, что для любого натурального числа n целое число $x = n^3 + 17n - 12$ делится на 6 без остатка.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ число $x = 6$. Значит утверждение верно. Предположим, что данное утверждение верно для любого натурального числа $n \le k$. Докажем, справедливость данного утверждения при $n = k + 1$. Число $x = (k+1)^3 + 17(k+1) - 12 = k^3 + 3k^2 +$
$+ 3k + 1 + 17k + 17 - 12 = k^3 + 17k - 12 + 3k^2 + 3k + 1 + 17 = (k^3 + 17k - 12) + 3k(k+1) + 18$.
По предположению индукции $k^3 + 17k - 12$ делится на 6. Одно из последовательных натуральных чисел k, $k+1$ четно, и поэтому слагаемое $3k(k+1)$ делится на 6. Так как каждое слагаемое в выражении $(k^3 + 17k - 12) + 3k(k+1) + 18$ делится на 6, то и вся сумма делится на 6. Согласно принципу математической индукции, число $x = n^3 + 17n - 12$ делится на 6 для любого натурального числа n.

1.2 Деление с остатком. Теорема о делении с остатком

Определение 2. Разделить целое число a ***на целое число*** $b \ne 0$ ***с остатком – это значит найти два таких целых числа*** q ***и*** r ***, чтобы выполнились условия:***

а) $a = bq + r$,

б) $0 \le r < |b|$.

Число q называется *неполным частным*, r - *остатком*.

Теорема 1. Каковы бы ни были целое число a ***и целое число*** $b \ne 0$***, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить*** a ***на*** b ***с остатком.***

Докажем сначала возможность деления с остатком.

Рассмотрим все случаи, которые здесь могут представиться.

1) a - любое целое число, $b > 0$.

Рассмотрим множество всех чисел, кратных b, и раположим его в порядке возрастания:

$$\ldots, b\cdot(-2), b\cdot(-1), b\cdot 0, b\cdot 1, b\cdot 2, \ldots$$

Пусть bq - наибольшее кратное число b, не превышающее a. Тогда $a \ge bq,$ но $a < b(q+1)$, т.е. $bq \le a < b(q+1),$ откуда $0 \le a - bq < b$.

Положив $a - bq = r$, получим:

$$a = bq + r,\ 0 \le r + b.$$

2) a - целое число, $b < 0$.

Так как $b<0$, то $-b>0$ и согласно случаю 1) деление a на $-b$ возможно, а это означает существование таких чисел q и r, что $a=(-b)q+r$ и $0\le r<|-b|$, или $a=b(-q)+r$, $0\le r<|b|$.

Возможность деления с остатком доказана.

Теперь докажем единственность деления с остатком.

Пусть деление a на b не единственно, т.е. пусть существуют два неполных частных q_1 и q_2 и два остатка r_1 и r_2 такие, что:

$$a=bq_1+r_1,\qquad 0\le r_1<|b|,$$
$$a=bq_2+r_2,\qquad 0\le r_2<|b|.$$

Тогда

$bq_1+r_1=bq_2+r_2$, или $b(q_1-q_2)=r_2-r_1$. (*)

Так как $0\le r_1<|b|$ и $0\le r_2<|b|$, то $|r_2-r_1|<|b|$.

Но в этом случае равенство (*) возможно лишь при условии:

$r_2-r_1=0$, или $r_2=r_1$, но тогда $q_1-q_2=0$, или $q_1=q_2$.

Итак, $q_1=q_2$, $r_1=r_2$. Единственность доказана.

3 Пример. Разделить а) 353 на 17; б) 353 на -17; в) -353 на 17; -353 на -17.

Решение. а) 353=17·20+13;

б) так как 353=17·20+13, то 353=(-17)·(-20)+13;

в) делим заданные числа по модулю. Получаем, что при делении частное равно 20, а остаток 13. Берем противоположное 20, это -20. Необходимо отнять 1.

-20-1=-21.

Чтобы вычислить остаток воспользуемся формулой

$r=a-bq=-353-17\cdot(-21)=-353+357=4$.

Ответ: $-353=17\cdot(-21)+4$.

г) делим заданные числа по модулю. Получаем, что при делении частное равно 20, а остаток 13. Берем противоположное 20, это -20. Необходимо прибавить 1.

-20+1=-19

Чтобы вычислить остаток воспользуемся формулой

$r=a-bq=-353-(-17)\cdot 21=-353+357=4$.

Контрольные вопросы:

1. Что означает высказывание «целое число a делится на целое число b»? Истинно ли оно, если $a=275$, $b=1$? А если $b=275$, $a=1$? Сформулируйте отрицание этого высказывания.
2. Охарактеризуйте множество целых чисел b таких, что $a \vdots b$, где a - фиксированное число.
3. Каким условиям должен удовлетворять остаток от деления a на b? Может ли при делении на (-142) получиться остаток 187? А остаток (-45)? А остаток 56?

4. Докажите, что а) из трех последовательных натуральных чисел одно делится на 3; б) из двух последовательных четных чисел одно делится на 4; в) из пяти последовательных натуральных чисел одно делится на 5.

5. Пусть $a=-173$, $b=15$. Укажите такое r, что $0 \le r < |b|$ и $(a-r) \vdots b$.

6. Укажите частное и остаток от деления 7 на 10, 150 на 17, -1023 на -29, -517 на 31, 623 на -19.

Упражнения для самостоятельного решения:

Докажите, что для любого натурального n:

1) $5^{2n}-1$ делится на 24;
2) 4^n+6n-1 делится на 9;
3) $10^{3n}-1$ делится на 3^3;
4) $3^{2n}+5$ не делится на 8.

5) Докажите. Что произведение любых трех последовательных целых чисел делится на 6.

Докажите, что для любого целого n:

6) n^3-n делится на 3;
7) n^5-n делится на 5;
8) n^7-n делится на 7;
9) $n(n^2+5)$ делится на 6;
10) n^5-n делится на 30.

11) Покажите, что если целое число n не делится на 7, то n^3-1 или n^3+1 делится на 7.

Найти неполное частное *q* и остаток *r* от деления *a* на *b*:

12) *a* = 5650, *b* = 19;
13) *a* = 8715, *b* = 53;
14) *a* = 7918, *b* = 85;
15) *a* = 3618, *b* = 45;
16) *a* = 2977, *b* = 49;
17) *a* = 9364, *b* = 105;
18) *a* = 6943, *b* = 151;
19) *a* = 4261, *b* = 83;
20) *a* = 5763, *b* = 79;
21) *a* = 8391, *b* = 98;
22) *a* = 3461, *b* = 172;
23) *a* = 7144, *b* = 87;
24) *a* = 1375, *b* = 48;
25) *a* = 5977, *b* = 187;
26) *a* = 2614, *b* = 67;
27) *a* = 3591, *b* = 88;
28) *a* = -7618, *b* = 75;
29) *a* = -4619, *b* = 55;
30) *a* = -4122, *b* = 43;
31) *a* = -2477, *b* = 48;
32) *a* = -8777, *b* = 66;
33) *a* = -4888, *b* = 79;

34) $a = -6555$, $b = 44$;
35) $a = -9411$, $b = 53$;
36) $a = -2657$, $b = 49$;
37) $a = -5742$, $b = 97$;
38) $a = 4125$, $b = -64$;
39) $a = 6218$, $b = -93$;
40) $a = 3259$, $b = -47$;
41) $a = 3618$, $b = -33$;
42) $a = 3697$, $b = -77$;
43) $a = 5143$, $b = -64$;
44) $a = 1394$, $b = -92$;
45) $a = 2217$, $b = -65$;
46) $a = 3782$, $b = -35$;
47) $a = 6555$, $b = -88$;
48) $a = -9455$, $b = -161$;
49) $a = -2578$, $b = -94$;
50) $a = -5454$, $b = -76$;
51) $a = -3257$, $b = -68$;
52) $a = -1475$, $b = -86$;
53) $a = -9573$, $b = -98$;
54) $a = -9512$, $b = -289$;
55) $a = -6124$, $b = -354$;
56) $a = -2351$, $b = -154$;
57) $a = -6357$, $b = -264$;
58) $a = -6573$, $b = -653$;
59) $a = -3611$, $b = -128$;
60) $a = -4155$, $b = -344$;

Найти наибольшее число a, для которого неполное частное от деления на число b равно q:

61) $b = 93$, $q = 65$;
62) $b = 101$, $q = 82$;
63) $b = 73$, $q = 42$;
64) $b = 108$, $q = 73$;
65) $b = 176$, $q = 38$;
66) $b = 119$, $q = 58$;
67) $b = 192$, $q = 36$;
68) $b = 128$, $q = 54$;
69) $b = 135$, $q = 46$;
70) $b = 67$, $q = 36$;
71) $b = 129$, $q = 49$;
72) $b = 135$, $q = 46$;
73) $b = 245$, $q = 21$;
74) $b = 115$, $q = 14$;
75) $b = 131$, $q = 18$;
76) $b = 109$, $q = 72$;
77) $b = 99$, $q = 64$;
78) $b = 147$, $q = 41$;
79) $b = 87$, $q = 57$;
80) $b = 97$, $q = 74$;

При делении целого числа a на натуральное число b получены неполное частное q и остаток r. Найти наименьшее из возможных значений для a:

81) $q = 261$, $r = 23$;
82) $q = 62$, $r = 41$;
83) $q = 53$, $r = 47$;
84) $q = 43$, $r = 58$;
85) $q = 108$, $r = 23$;
86) $q = 37$, $r = 63$;
87) $q = 49$, $r = 51$;
88) $q = 141$, $r = 16$;
89) $q = 122$, $r = 17$;
90) $q = 173$, $r = 12$;
91) $q = 78$, $r = 37$;
92) $q = 83$, $r = 34$;
93) $q = 221$, $r = 33$;
94) $q = 243$, $r = 29$;
95) $q = 87$, $r = 31$;
96) $q = 67$, $r = 53$;
97) $q = 91$, $r = 57$;
98) $q = 97$, $r = 44$;
99) $q = 79$, $r = 64$;
100) $q = 55$, $r = 61$;

Найти наименьшее натуральное число b, для которого остаток от деления числа a на b равен r:

101) $a = 201$, $r = 11$;
102) $a = 193$, $r = 5$;
103) $a = 307$, $r = 17$;
104) $a = 469$, $r = 19$;
105) $a = 500$, $r = 20$;
106) $a = 156$, $r = 18$;
107) $a = 144$, $r = 6$;
108) $a = 155$, $r = 61$;
109) $a = 155$, $r = 7$;
110) $a = 244$, $r = 10$;
111) $a = 411$, $r = 12$;
112) $a = 356$, $r = 14$;
113) $a = 306$, $r = 16$;
114) $a = 185$, $r = 29$;
115) $a = 261$, $r = 27$;
116) $a = 227$, $r = 23$;
117) $a = 241$, $r = 16$;
118) $a = 139$, $r = 15$;
119) $a = 204$, $r = 18$;
120) $a = 426$, $r = 12$;

При делении числа a на натуральное число b получены неполное частное q и остаток r. Найти наибольшее из возможных значений для r и соответствующее значение b:

121) $a = 7798$, $q = 31$;
122) $a = 9050$, $q = 30$;
123) $a = 6178$, $q = 34$;
124) $a = 979$, $q = 17$;
125) $a = 8109$, $q = 54$;
126) $a = 6326$, $q = 63$;
127) $a = 5452$, $q = 53$;
128) $a = 5907$, $q = 67$;
129) $a = 5234$, $q = 61$;
130) $a = 4277$, $q = 61$;
131) $a = 4585$, $q = 44$;
132) $a = 6038$, $q = 67$;
133) $a = 5927$, $q = 75$;
134) $a = 4894$, $q = 58$;
135) $a = 6375$, $q = 61$;
136) $a = 3849$, $q = 49$;
137) $a = 6188$, $q = 55$;
138) $a = 3901$, $q = 60$;
139) $a = 5181$, $q = 70$;
140) $a = 4421$, $q = 65$;

2 НОД. Алгоритм Евклида. НОК

2.1 НОД

Определение 3. Всякое целое число $\delta \neq 0$, делящее одновременно целые $a_1, \dots, a_n$ над общим делителем этих чисел.

Определение 4. Общий делитель d целых чисел $a_1, \dots, a_n$ называется наибольшим общим делителем, если он делится на всякий общий делитель этих чисел, т. е.

1) ${}^{d}/_{a_1}, \dots, {}^{d}/_{a_n}$

2) ${}^{\delta}/_{a_1}, \dots, {}^{\delta}/_{a_n} \Rightarrow {}^{\delta}/_{d}$.

Предложение. НОД чисел $a_1, \dots, a_n$ определен однозначно с точностью до знака (т.е. если d – НОД чисел $a_1, \dots, a_n$, то $-d$ – тоже НОД этих чисел).

Доказательство: пусть d_1, d_2 - НОД чисел $a_1, \dots, a_n \Rightarrow^{опр.1} d_1 \vdots d_2$ и $d_2 \vdots d_1$ (т. к. НОД делится на $\forall$ общий делитель этих чисел) $\Rightarrow^{св.12^\circ}$ $d_1 = d_2$ или $d_1 = -d_2$.

В дальнейшем условимся рассматривать только положительные значения НОД и обозначать $d = (a_1, \dots, a_n)$.

Для нахождения НОД существует алгоритм, который был дан Евклидом. Описав способ нахождения НОД, мы доказываем тем самым существование НОД.

Алгоритм Евклида базируется на следующих леммах:

Лемма 1. Если $a \vdots b$, то $(a, b) = b$

Доказательство: 1) b/a и b/b $\Rightarrow b$ - общий делитель a и b.

2) пусть c - общий делитель a и b.

$$c/a,\ c/b \Rightarrow c/b \Rightarrow^{опр.2} (a, b) = b.$$

Лемма 2. Если $a = bq + r$, то $(a, b) = (b, r)$ $r \neq 0$

Доказательство: пусть $(a, b) = d$, тогда

1) из d/a и d/b, $r = a - bq \Rightarrow^{св.7^\circ}$

2) δ/b и $\delta/r \Rightarrow \delta/a$, δ - общий делитель a и $b \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta/d \Rightarrow d = (b, r)$.

$$(a, b) = (b, r).$$

2.2 Алгоритм Евклида

Пусть a и b - положительные числа, $a > b > 0$. Разделим a на b, по теореме о делении с остатком: $a = bq_0 + r$, $0 \le r_1 < b$.

1°. $r_1 = 0$, т. е. $a \vdots b \Rightarrow^{л.1} d = b$.

2°. $r_1 \neq 0$, то получаем ряд равенств:

$b = r_1 q_1 + r_2$; $0 < r_2 < r_1$ (если $r_2 = 0$, то процесс заканчивается).

$$\begin{array}{ll} r_1 = r_2 q_2 + r_3 & 0 < r_3 < r_2 \\ \text{- -} & \\ r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = r_n q_n & \end{array} \qquad (1)$$

Процесс заканчивается, когда мы получаем $r_{n+1} = 0$.

Последнее неизбежно, т. к. остатки, получаемые в процессе деления неотрицательны и убывают; следовательно, на каком-то шаге получим деление без остатка.

В силу леммы 2: $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_{n-1}, r_n) = r_n$.

Вывод: (a , b) двух чисел равен последнему неравному нулю остатку в процессе алгоритма Евклида.

Пример. Найти (185, 55) = 5.

Задача отыскания НОД конечного множества чисел a_1 , ... , a_n сводится к нахождению НОД для двух чисел.

Теорема 1. Если $(a_1, a_2) = d_2$; $(d_2, a_3) = d_3$, … , $(d_{n-1}, a_n) = d_n$, то $(a_1, \ldots, a_n) = d_n$. (Доказать самостоятельно).

Свойства НОД.

1°. Пусть $k \neq 0,\ k \in Z$.

$(ak, bk) = (a, b)\ k$

Применим алгоритм Евклида

$ak = bk\ q_0 + r_1 k$

$bk = r_1 k\ q_1 + r_2 k$

- - - - - - - - - - - -

$r_{n-2} k = r_{n-1} k\ q_{n-1} + r_n k$

$r_{n-1} k = r_n k\ q_n$

$\Rightarrow (ak, bk) = r_n k = (a, b)\ k$.

2°. Пусть δ - любой общий делитель a и b, $\left(\frac{a}{\delta}; \frac{b}{\delta}\right) = \frac{(a,b)}{\delta}$

$(a, b) = \left(\frac{a}{\delta}\delta; \frac{b}{\delta}\delta\right) = \left(\frac{a}{\delta}; \frac{b}{\delta}\right)\delta \Rightarrow$ св.2°

3. Если d - наибольший общий делитель чисел *a* и *b*, то существует такие целые числа *x* и *y*, что $ax+by=d$.

Равенство $ax+by=d$ называется представление наибольшего общего делителя в виде линейной комбинации чисел *a* и *b*.

Пример. Найти линейное представление наибольшего общего делителя чисел 90 и 35.

Решение. Применяя алгоритм Евклида к числам 90 и 35, получаем:

$90=35\cdot2+20$
$35=20\cdot1+15$
$20=15\cdot1+5$
$15=5\cdot3$

Последний, отличный от нуля остаток равен 5, поэтому (90,35) = 5. Заметим, что в силу первого равенства $20=90-35\cdot2$. Подставляя это значение в равенство $15=35-20\cdot1$, получаем: $15=35-(90-35\cdot2)=35\cdot3-90$. Наконец, в равенстве $5=20-15\cdot1$

заменим 20 на 90-35·2, а 15 на 35·3-90 и получим искомое линейное представление:
5=90-35·2-(35·3-90) = 90·2-35·5=2·90 + (-5)·35.
Здесь x = 2 и y = -5.
Теорема, аналогичная теореме 1, верна и для наибольшего общего делителя нескольких целых чисел: если $d=(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, то найдутся такие целые числа $x_1, x_2, ..., x_n$, что $d = a_1x_1 + a_2x_2 + .. + a_nx_n$.

Пример: Найти НОД с помощью алгоритма Евклида чисел 549, 387.

Решение:

$$-\begin{array}{r|l} 549 & 387 \\ \cline{2-2} 387 & 1 \\ \hline \end{array} \quad -\begin{array}{r|l} 387 & 162 \\ \cline{2-2} 324 & 2 \\ \hline \end{array} \quad -\begin{array}{r|l} 162 & 63 \\ \cline{2-2} 136 & 2 \\ \hline \end{array} \quad -\begin{array}{r|l} 63 & 36 \\ \cline{2-2} 36 & 1 \\ \hline \end{array} \quad -\begin{array}{r|l} 36 & 27 \\ \cline{2-2} 27 & 1 \\ \hline \end{array} \quad -\begin{array}{r|l} 27 & 9 \\ \cline{2-2} 27 & 3 \\ \hline 0 & \end{array}$$

549 = 387·1+162
387 = 162·2+63
162 = 63·2+26
387 = 162·2+63
162 = 63·2+36
63 = 36·1+27
36 = 27·1+9
27 = 9·3
Последний, от нуля остаток равен 9, следовательно, (549, 387) = 9.

Контрольные вопросы:

1.Что называется наибольшим общим делителем (НОД) двух чисел?
2.Как найти наибольший общий делитель двух чисел?
3.Каковы основные свойства НОД?
4.Почему процесс последовательного деления в алгоритме Евклида конечен?
5.Как понимать, что НОД двух чисел является их линейной комбинацией?
6.Как найти наибольший общий делитель более двух чисел?

7.На каких леммах основывается алгоритм Евклида?

Упражнения для самостоятельного решения:

Найдите НОД следующих чисел:

1) 72, 108;
2) 360, 1060;
3) 655, 755;
4) 1235, 4568;
5) 1521, 3621, 9243;
6) 4853, 9073, 8651, 1477;
7) 5459, 721, 2369, 824;
8) 1681, 3690, 1189, 697;
9) 14266, 466, 954, 354;
10) 2705, 555, 6345, 125;
11) 1691, 4009, 3629;
12) 722, 958, 12456, 558;
13) 654, 7612, 4879, 555;
14) 9847, 24961, 18091, 16717;
15) 5643, 49761, 8721, 11799, 15903;
16) 561, 935, 2057, 3179;
17) 5746, 6630, 11934, 10166;
18) 22351, 28119, 33887;

Сократите дроби:

19) $\frac{254}{636}$;
20) $-\frac{587}{983}$;
21) $\frac{699}{1245}$;
22) $\frac{1265}{3565}$;
23) $-\frac{4568}{8723}$;
24) $\frac{6548}{10256}$;
25) $\frac{12458}{13568}$;
26) $-\frac{4678}{6342}$;
27) $\frac{7533}{9511}$;
28) $\frac{33665}{35489}$;
29) $\frac{1971}{25623}$;
30) $\frac{2003}{14021}$;
31) $\frac{1343}{7937}$;
32) $\frac{1554}{147895}$;
33) $\frac{852}{789124}$;
34) $-\frac{455}{819}$;
35) $\frac{8532}{16116}$;
36) $-\frac{4062}{4739}$;
37) $\frac{6426}{8694}$;
38) $\frac{63047}{72457}$;

Пользуясь алгоритмом Евклида, найдите хотя бы одно целое решение уравнения:

39) $26x+91y=11$;

40) $33x+51y=21$;

41) $73x+85y=7$;

42) $44x+187y=22$;

43) $311x-28y=2$;

44) $253x-449y=3$;

45) $143x+169y=5$;

46) $60x-91y=2$;

47) $53x+47y=11$;

48) $17x-25y=117$;

49) $26x+34y=13$;

50) $258x-172y=56$;

51) $43x+37y=21$;

52) $7x-19y=23$;

53) $12x-7y=29$;

54) $4x-14y=7$;

55) $15x+16y=1$;

56) $15x+25y=5$;

57) $143x+262y=1$;

58) $134x+156y=2$;

59) $13x+17y=2$;

60) $169x-182y=13$;

61) $285x+399y=57$;

62) $153x+408y=51$;

63) $344x-215y=43$;

64) $25x+35y=7$;

65) $215x+86y=43$;

66) $17x+12y=1$;

67) $25x+16y=1$;

68) $55x+25y=5$;

69) $57x-45y=3$;

70) $150x+45y=15$;

3 Взаимно простые числа и их основные свойства

Определение 1. Если *(* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ *)=1,* то $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ называются взаимно простыми.

Например, числа (15, 77)=1, а числа 15 и 75 не являются взаимно простыми, так как (15,75)=15.

Свойства взаимно простых чисел

1. Для того чтобы числа a и b были взаимно простыми, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие целые числа x и y, что $ax+by=1$.

   Следствие. Если числа a и b взаимно просты и $a \vdots a_1, b \vdots b_1$, то числа a_1 и b_1 взаимно просты.
2. Частные от деления чисел a и b на (a,b) взаимно просты.
3. Если произведение двух чисел $a \cdot b$ делится на c и a взаимно просто с c, то b делится на c.
4. Если числа a и b взаимно просты, то число c делится на $a \cdot b$ тогда и только тогда, когда c делится на a и на b.
5. Если два числа a и b взаимно просты с третьим числом c, то и их произведение взаимно просто с c.

   Следствие. Если числа a и b взаимно просты, то любые их натуральные степени – взаимно простые числа.

На основании этого следствия можно утверждать, что никакая натуральная степень несократимой дроби, знаменатель которой отличен от нуля, не может быть сократимой дробью и, в частности, натуральным числом.

Последнее означает, что корень *n-й* степени из натурального числа не может равняться несократимой дроби.

Замечание. Из того, что $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)=1$, еще не следует, что и числа, образующие некоторое подмножество множества $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, взаимно просты.

Определение 2. Если любая пара чисел, составленная из чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, взаимно проста, то числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ называют попарно взаимно простыми.

Например, числа 715, 96, 119 попарно взаимно просты, так как (715,96) = (715,119) = (96,119) = 1.

Контрольные вопросы:

1.Какие числа называются взаимно простыми?
2.Каково условие взаимной простоты двух чисел a и b?
3.Перечислите свойства взаимно простых чисел.
4.Какая разница между понятиями: «взаимно простые числа» и «попарно взаимно простые числа»?
5.Какое из понятий «взаимно простые числа» и «попарно простые числа» являются следствием другого? В каком случае эти два понятия совпадают?
6.Для того, чтобы делитель d чисел a и b был их наибольшим общим делителем, необходимо и достаточно, чтобы $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)=1$. Докажите.
7.Докажите, что алгебраическая сумма несократимых дробей, знаменатели которых попарно просты, не может быть целым числом.

Упражнения для самостоятельного решения.

Докажите, что при любом натуральном n:

1) $n^6 - n^2$ делится на 60;
2) $n^7 - n^3$ делится на 120;
3) $10^n + 5$ делится на 15;
4) $7^{6n} - 1$ делится на 18;

5) Найдите среди чисел 9, 14, 15 и 27 три пары взаимно простых чисел.
6) Докажите, что $n^6 + 17$ делится на 9, если n – целое число, взаимно простое с 9.

7) Докажите, что натуральные числа $4n+3$, $2n+2$ и $2n+1$ попарно взаимно просты.
8) Докажите, что n^2-1 делится на 24, если n – целое число, взаимно простое с 6.
9) Докажите, что натуральные числа $4n-1$, n и $2n-1$ попарно взаимно просты.
10) Найдите натуральные числа a и b, такие что:

а) $a+b=75$ и $[a,b]=90$;

б) $a-b=18$ и $[a,b]=165$;

в) $a^2-b^2=64$ и $[a,b]=30$;

г) $a^2+b^2=13$ и $[a,b]=6$;

11) Докажите, что при любом натуральном n произведение $n(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 24;
12) Докажите, что при любом натуральном n:

а) $n^2(n^2-1)$ делится на 12;

б) $30^n+5^{4n}-4^{2n}-1$ делится на 58;

в) n^5-5n^3+4n делится на 120;

г) $n(n^4-125n^2+4)$ делится на 60;

13) Докажите, что при любых целых a и b число $ab(a^4-b^4)$ делится на 30;
14) Докажите, что число $\frac{7a^3}{3}+\frac{3a^2}{2}+\frac{a}{6}$ является целым при любом натуральном a.
15) Докажите, что $(n^7-n^3+1{,}30)=1$ при любом натуральном n.

4 Наименьшее общее кратное. Свойства НОК

Определение 5. Целое число $M\neq 0$ называется ОК чисел a_1, ... , a_n, если оно делится на $\forall$ из данных чисел.

Среди совокупности ОК чисел особую роль играет одно число, называемое НОК.

Определение 6. Целое число m называется **НОК** чисел a_1, ... , a_n, если

1) $a_1/m, \ldots, a_n/m \Rightarrow m=$ ОК(a_1, ... , a_n)

2) $\forall$ ОК этих чисел $\vdots$ m, т.е. a_1/M, a_2/M, … , a_n/M $\Rightarrow$ $M \vdots m$ (m/M).

Возникает вопрос о рациональном способе нахождения НОК. Один из практических способов – использование теоремы, которая устанавливает связь НОК и НОД.

Теорема 1. НОК двух чисел равно их произведение, деленное на НОД этих чисел.

$$[a,b]=\frac{a\cdot b}{(a,b)}.$$

Доказательство: пусть $M=$ОК$(a,b) \Rightarrow M=ak, k\in Z$.

M – кратно и $b \Rightarrow \frac{ak}{b}\in Z.$

Пусть $(a,b)=d \Rightarrow a=a_1d,\ b=b_1d$

$\frac{ak}{b}=\frac{a_1dk}{b_1d}=\frac{a_1k}{b_1}\in Z$, $(a_1,b_1)=1\Rightarrow^{3^\circ}\ k\vdots b_1$, т. е. $k=b_1t=\frac{b}{d}t$, где $t\in Z\Rightarrow$

$\Rightarrow M=\frac{ab}{d}t.$

НОК получим при $t=1$. $m=\frac{ab}{d}$; или $M=mt.$

Следствие 1. Любые два отличные от нуля целые числа имеют наименьшее общее кратное.

Следствие 2. Наименьшее общее кратное двух чисел a и b ($a\neq 0, b\neq 0$) является наименьшим по величине положительным общим кратным этих чисел.

Свойства НОК

Свойство 1. Если каждое из чисел a и b умножить на одно и то же число $k\neq 0$, то их НОК умножится на k.

Свойство 2. Если $a\vdots k$ и $b\vdots k$, то $\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]=[a,b]\vdots k.$

Теорема 2. Если $[a_1,...,a_{n-1}]=\mu$ и $[\mu,a_n]=m$, то $[a_1,...,a_n]=m$

Теорема 3. Если

$[a_1,a_2]=m_1,[m_1,a_3]=m_2,...,\ [m_{n-2},a_n]=m_{n-1}$, то $[a_1,a_2,...,a_n]=m_{n-1}$

Теорема 4. НОК попарно взаимно простых чисел $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ равно их произведению.

Вывод: совокупность общих кратных двух чисел совпадает с совокупностью кратных их общего наименьшего кратного.

Контрольные вопросы:

1. Какое число называется общим кратным данных чисел?
2. Что называется наименьшим общим кратным двух чисел?
3. Чему равно НОК двух чисел?
4. НОК двух чисел a и b равно их произведению тогда и только тогда, когда a и b взаимно просты. Докажите.

5. Докажите, что две положительные несократимые дроби равны тогда и только тогда, равны соответственно их числители и знаменатели.
6. Какая формула связывает НОК и НОД двух чисел?

Упражнения для самостоятельного решения:

Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю и найдите их сумму:

1) $\frac{1}{120}, \frac{1}{100}, \frac{14}{323}$;
2) $\frac{1}{1223}, \frac{7}{1565}, \frac{17}{1440}$;
3) $\frac{5}{296}, \frac{13}{2100}$;
4) $\frac{7}{1625}, -\frac{19}{29808}$;
5) $\frac{1}{122}, -\frac{19}{1565}, \frac{19}{1333}$;
6) $\frac{17}{1688}, -\frac{1}{2808}$;
7) $\frac{1}{1224}, \frac{7}{1500}, \frac{13}{1142}$;
8) $\frac{1}{210}, \frac{3}{100}, \frac{13}{294}$;
9) $\frac{5}{297}, \frac{13}{396}, \frac{1}{77}$;
10) $\frac{1}{1224}, \frac{3}{200}, \frac{5}{1625}$;
11) $\frac{23}{3690}, \frac{13}{12348}, \frac{41}{81}$;
12) $\frac{1200}{3690}, \frac{9}{10002}, \frac{1}{1331}$;
13) $\frac{3267}{65219}, \frac{6048}{9072}, \frac{21}{83}$;
14) $\frac{540}{546}, \frac{1224}{1352}, \frac{2002}{1980}$;
15) $-\frac{819}{1690}, \frac{2}{789}, \frac{1}{1973}$;
16) $\frac{6}{945}, \frac{417}{1971}, \frac{48}{1949}$.

Решить в натуральных числах следующую систему уравнений:

17) $\begin{cases} x+y=150, \\ (x,y)=30; \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{11}{7}, \\ (x,y)=45; \end{cases}$

19) $\begin{cases} xy=8400, \\ (x,y)=20; \end{cases}$

20) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{9}, \\ (x,y)=28; \end{cases}$

21) $\begin{cases} xy=20, \\ [x,y]=10; \end{cases}$

22) $\begin{cases} x+y=2990, \\ (x,y)=10; \end{cases}$

23) $\begin{cases} x+y=300, \\ (x,y)=5; \end{cases}$

24) $\begin{cases} xy=252, \\ [x,y]=126; \end{cases}$

25) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{9}{11}, \\ (x,y)=200; \end{cases}$

26) $\begin{cases} xy=26400, \\ [x,y]=1320; \end{cases}$

27) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3}, \\ (x,y)=70; \end{cases}$

28) $\begin{cases} x+y=864, \\ (x,y)=72; \end{cases}$

5 Простые числа

Всякое целое число, больше 1, имеет не менее 2-х делителей, именно 1 и само себя.

Определение 1. Натуральное число **p>1** называется **простым**, если p не имеет натуральных делителей, отличных от 1 и p.

Определение 2. Натуральное число n>**1** называется **составным**, если n имеет, по крайней мере, один натуральный делитель, отличный от **1** и n.

1 не является ни простым, ни составным (т.к. имеет всего один натуральный делитель).

Первые простые числа в натуральном ряду: **2, 3, 5, 7, 11, 13, …**. Среди простых чисел имеется лишь одно четное число 2.

Простые числа – это элементы, при помощи, умножения которых строятся натуральные числа (>1); поэтому одной из важнейших задач теории чисел является изучение свойств простых чисел.

Свойства простых чисел:

1. Если простое число $p \vdots n$, $n \in N$, $n \neq 1 \Rightarrow p=n$

Доказательство: пусть $p \neq n \Rightarrow p$ имело бы 3 делителя 1, p, n, что невозможно, т.к. p- простое.

2. Если p_1, p_2 – различные простые числа $\Rightarrow p_2$ не $\vdots$ p_1

Доказательство: p_2 – простое $\Rightarrow p_2$ имеет делитель 1 и p_2, но $p_2 \neq p_1 \Rightarrow p_2$ не $\vdots$ p_1

3. $n \in N$, p – простое $\Rightarrow n \vdots p$ или $(n, p)= 1$

Доказательство: пусть $(p, n)= d \Rightarrow \frac{d}{p}$ p- простое число $\Rightarrow$ d= 1 или d = p, $d = 1 \Rightarrow (d, n) \Rightarrow 1$; $d = p \Rightarrow n \vdots d$, т.е. $n \vdots p$.

4. $ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p \vee b \vdots p$.

Доказательство: если $a \vdots p$ – то утверждение теоремы справедливо, если a не $\vdots$ $p \Rightarrow (a, p) = 1 \wedge ab \vdots p \Rightarrow b \vdots p$.

5. Если произведение нескольких сомножителей $\vdots$ p, то, по крайней мере, один из сомножителей $\vdots$ p. (обобщение свойства 4).

Теорема 1. Для $\forall$ натурального числа **n>1** наименьший отличный от единицы делитель есть число простое.

Доказательство: пусть q – наименьший $\neq 1$ делитель натурального числа n>1; если бы q было составным, то оно имело бы некоторый делитель q_1, с условием $1 < q_1 < q$, но $n \vdots q$ и $\vdots q \Rightarrow n \vdots q_1$, а это противоречит предположению относительно q.

Теорема 2. Наименьший отличный от единицы делитель составного числа **n** (простой по теореме 1) не превосходит $\sqrt{n}$.

Доказательство: пусть q – это делитель $\Rightarrow n= q*a_1$, $a_1 \geq q$, откуда, перемножая и сокращая на a_1, получим $n \geq q^2$, $q \leq \sqrt{n}$.

Эта теорема дает критерий, позволяющий судить, является ли натуральное число a простым или составным.

Последовательность простых чисел неограниченна. Этот результат был получен еще Евклидом и помещен в 9 веке в книге его «Начал» в качестве 20-ой теории.

Теорема (Евклида). Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство: предполагается, что множество простых чисел конечно и состоит из чисел 2, 3, . . . , $p_r(*)$, где p_r – последнее самое большое простое число.

Рассмотрим **N= 2*3 . . .** $p_r + 1$, $N > 1 \Rightarrow$ N- либо простое, либо составное

а) если N- простое; $N > p_i$, где $p_i \in \{2,3,...p\}$ т.е. > любого простого числа (т.к. других простых не существует) $\Rightarrow$ N- не может быть простым;

б) если N-составное; $N \not\vdots\ 2$, $N \not\vdots\ 3$, . . ., $N \not\vdots\ p \Rightarrow$ не $\vdots$ ни на одно простое число, т.е. не имеет делителей, отличных от 1 и N $\Rightarrow$ не составное.

$N \neq 1$, ни простое, ни составное – противоречие. ▲

Простые числа, хотя их и бесконечно много, составляют не большую часть всех натуральных чисел.

Теорема 3. (основная теорема арифметики). Всякое натуральное число n>1 либо просто, либо может быть представлено, и притом единственным образом, в виде произведения простых чисел.

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \quad (1)$$

Множители $p_1, p_2, .., p_k$ обычно располагают в порядке возрастания.

Представление натурального числа n в форме (1) называется каноническим; это представление единственно. Представление (1) называют факторизацией числа n.

Примеры. $4312 = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 11$, $401375 = 5^3 \cdot 13^2 \cdot 19$.

Следствие 1. Если $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ - каноническое разложение числа a, то все делители этого числа имеют вид: $c = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, где $0 \le \beta_i \le \alpha_i \ (i = 1, 2, ..., k)$.

Пусть даны натуральные числа a и b. Их каноническое разложение всегда можно записать в виде:

$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, $\quad b = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\gamma_s}$. Здесь предполагается, что α_i и γ_i могут принимать и нулевые значения. Это позволит писать в обоих разложениях одни и те же простые числа $p_1, p_2, ..., p_s$, а именно простые числа, которые входят в разложение хотя бы одного из чисел a и b.

Следствие 2. Наибольший общий делитель чисел a и b имеет вид:

$$(a,b) = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\lambda_s},$$

$$где\, \lambda_i = \min(\alpha_i, \gamma_i)$$

Следствие 3. Наименьшее общее кратное чисел a и b имеет вид:

$$[a,b] = p_1^{\mu_1} \cdot p_2^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\mu_s},$$

$$где\, \mu_i = \max(\alpha_i, \gamma_i)$$

Из них непосредственно следует ранее доказанное тождество $[a,b] \cdot (a,b) = a \cdot b$. Эти утверждения переносятся и на случай более двух чисел.

Решето Эратосфена

Греческим математиком Эратосфеном (III в. до н.э.) был найден способ выделения простых чисел из любого отрезка 1,2,3,…,n натурального ряда путем вычеркивания числа 1, затем всех чисел кратных числу 2 (кроме 2), затем – кратных числу 3 (кроме 3), и т.д.

Таким образом, надо вычеркнуть все числа, кратные простым числам: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, ..., p \le \sqrt{n}$

Практические советы:

1) Каждое $p_s - e$ число после p_s (считая и уже зачеркнутые ранее) кратно p_s и подлежит вычеркиванию.

2) Дойдя до невычеркнутого простого числа, большего или равного $\sqrt{n}$, следует остановиться, так как все числа, оставшиеся невычеркнутыми, уже простые.

Пример. Выделить простые числа из отрезка натурального ряда 11, 12,…,40.

Решение. Выписываем все натуральные числа от 11 до 40 и вычеркиваем указанным способом все составные числа (вычеркивание заменяем подчеркиванием).

11, <u>12,</u> 13, <u>14</u>, <u>15</u>, <u>16</u> ,17, <u>18</u>, 19, <u>20</u>, <u>21</u>, <u>22</u>, 23, <u>24,</u> <u>25</u>, <u>26</u>, <u>27</u>, <u>28</u>, 29, <u>30</u>, 31, <u>32</u>, <u>33,</u> <u>34,</u> <u>35</u>, <u>36</u>, 37, <u>38</u>, <u>39</u>, <u>40.</u>

Числа 11, 13, 19,23, 31,37 простые.

Контрольные вопросы:

1. Какие числа называются простыми? Составными?
2. Является ли 1 простым числом? Составным числом?
3. Какие из простых чисел четные?
4. Может ли одно простое число делиться на другое простое число?
5. Докажите, что если ни одно из чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ не делится на простое число p, то их произведение тоже не делится на p.
6. Можно ли назвать самое большое простое число?
7. Могут ли в натуральном ряду чисел идти подряд 1000000 составных чисел?
8. Конечно ли множество простых чисел?
9. Сколько существует способов разложения числа $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ в произведение двух взаимно простых множителей?
10. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ -каноническое разложение натурального числа n. Докажите, что $\sqrt[m]{n}$ тогда и только тогда является целым числом, когда показатели $\alpha_1, ..., \alpha_k$ канонического разложения делятся на m.

Упражнения для самостоятельного решения:

Разложите на простые множители числа:

1) 5471;	2) 8788;
3) 14521;	4) 35800;

5) 5488;
6) 27785;
7) 19455;
8) 55857;
9) 82798;
10) 4497552;
11) 273714;
12) 67463888032179;
13) 29719;
14) 765010;
15) 914587;
16) 5553900;

С помощью решета Эратосфена найдите простые числа от *a* до *b*:

17) a=160, b=180;
18) a=180, b=210;
19) a=220, b=250;
20) a=260, b=290;
21) a=300, b=330;
22) a=340, b=370;
23) a=370, b=400;
24) a=410, b=440;
25) a=450, b=480;
26) a=490, b=520;
27) a=530, b=560;
28) a=570, b=600;
29) a=610, b=640;
30) a=650, b=680;
31) a=690, b=720;
32) a=730, b=760;
33) a=770, b=800;
34) a=940, b=980;

Определить все простые числа, меньшие числа:

35) 60;
36) 70;
37) 80;
38) 90;
39) 100;
40) 110;
41) 120;
42) 130;
43) 140;
44) 150;
45) 160;
46) 170;
47) 180;
48) 190;
49) 200;
50) 210;

Найти наименьшее и наибольшее простые числа, заключенные между числами *a* и *b*:

51) a=3204, b=3220;
52) a=3990, b=4006;
53) a=3372, b=3390;
54) a=4555, b=4570;
55) a=1998, b=2010;
56) a=6788, b=6800;
57) a=5325, b=5340;
58) a=8142, b=8160;
59) a=4753, b=4775;
60) a=3411, b=3430;
61) a=1856, b=1870;
62) a=9540, b=9560;
63) a=2140, b=2152;
64) a=2350, b=2370;
65) a=3750, b=3765;
66) a=7777, b=7790;
67) a=1598, b=1610;
68) a=6145, b=6160;
69) a=1744, b=1760;
70) a=3111, b=3130;

Известны НОД и НОК a и b. Найдите натуральные числа a, b.

71) $(a, b) = 5$;	$[a, b] = 49395$;
72) $(a, b) = 15$;	$[a, b] = 630$;
73) $(a, b) = 13$;	$[a, b] = 715$;
74) $(a, b) = 55$;	$[a, b] = 4235$;
75) $(a, b) = 30$;	$[a, b] = 15660$;
76) $(a, b) = 36$;	$[a, b] = 6480$;
77) $(a, b) = 26$;	$[a, b] = 4914$;
78) $(a, b) = 14$;	$[a, b] = 4410$;
79) $(a, b) = 35$;	$[a, b] = 8925$;
80) $(a, b) = 12$;	$[a, b] = 1872$;
81) $(a, b) = 57$;	$[a, b] = 12597$;
82) $(a, b) = 113$;	$[a, b] = 3390$;
83) $(a, b) = 67$;	$[a, b] = 4422$;
84) $(a, b) = 91$;	$[a, b] = 35581$;
85) $(a, b) = 53$;	$[a, b] = 37789$;
86) $(a, b) = 17$;	$[a, b] = 36941$;
87) $(a, b) = 43$;	$[a, b] = 23693$;
88) $(a, b) = 19$;	$[a, b] = 47329$;
89) $(a, b) = 67$;	$[a, b] = 14807$;
90) $(a, b) = 71$;	$[a, b] = 2059$;

6 Систематические числа

6.1 Непозиционные системы счисления.

Для записи натуральных чисел применяют различные системы счисления, которые можно разбить на две группы: непозиционные и позиционные. В непозиционных системах счисления значение каждого применяемого знака не зависит от его места в записи числа. Из многочисленных непозиционных систем счисления некоторое значение сохранила в настоящее время лишь римская нумерация.

Непозиционной была система счисления и у древних греков. Культура древней Руси тесно связана с византийской, т.е. греческой культурой, поэтому и принцип обозначения чисел был похож на греческий: числа обозначались с помощью букв, над которыми ставился особый знак (титло). В славянском счислении применялись следующие названия для обозначения высших десятичных разрядов: 10 тысяч назывались тьмой, 10 тем-легионом, 10 легионов-леодром.

6.2 Позиционные системы счисления

В позиционных системах счисления значение применяемых символов зависит от места, которое этот символ занимает в записи числа. Чаще всего применяют позиционные системы счисления с фиксированным основанием. В этих системах для записи натуральных чисел достаточно конечного множества знаков (цифр). При этом сдвиг цифры на одно место влево влечет за собой увеличение ее числового значения в g раз, где g некоторое натуральное число, большее 1. Число g называют основанием системы счисления. Чаще всего применяют десятичную систему счисления, в которой g=10.

Определение 1. Систематической записью натурального числа N по основанию g называют представление этого числа в виде суммы:

$$N = a_n g^n + ... + a_1 g + a_0 \qquad (1)$$

где $a_n, ..., a_1, a_0$ - числа, принимающие значения $0, 1, ..., g-1$, причем $a_n \neq 0$.

Позиционная система счисления с основанием g называется g-ичной (двоичная, троичная и т.д.). Для обозначения чисел $0, 1, ..., g-1$ в g-ичной системе счисления используют особые знаки, называемых цифрами.

Теорема 1. Всякое натуральное число N может быть единственным образом представлено в виде систематической записи по любому основанию g>1.

Примеры:

1.Запись 325_3 означает число $3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^0$

2. Запись $4 \cdot 7^4 + 5 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 8$ коротко пишут 45658_7.

6.3 Переход от g-ичной системы счисления к десятичной и обратно

Натуральное число N можно записать в любой системе счисления. Поэтому возникает вопрос о переводе записи числа из одной системы счисления в другую. Достаточно научиться решать этот вопрос в случае, когда одна из систем десятичная.

1. Пусть дана g-ичная запись числа N: $N = a_n g^n + ... + a_1 g + a_0$. Надо найти десятичную запись того же числа. Чтобы решить данную задачу, достаточно подставить в запись (1) вместо $a_n, ..., a_1, a_0$ и g десятичные записи этих чисел и выполнить указанные действия. Десятичная запись результата и будет искомым ответом.

Пример. $325_3 = 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^0 = 38$

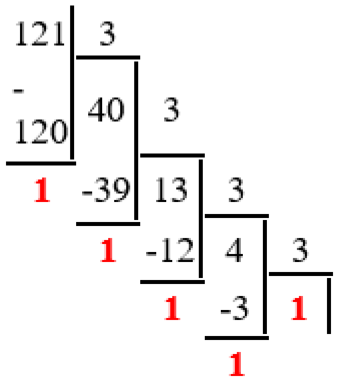
2. Дана десятичная запись числа N. Надо найти g-ичную запись того же числа. Пусть g-ичная запись числа N имеет вид: $N = a_n g^n + ... + a_1 g + a_0$. Тогда $N = N(1) g + a_0$, где

$$N(1) = a_n g^{n-1} + ... + a_1 \qquad (2)$$

Поскольку $0 \le a_0 < g$, то a_0 - остаток от деления N на g, $N(1)$ - частное от этого деления. Из равенства (2) видно, что a_1 - остаток от деления $N(1)$ на g и т.д.

Таким образом, g-ичная запись числа N находится следующим образом. Число N делим (в десятичной системе счисления) на g. Остаток от деления даст последнюю цифру g-ичной записи N. Частное $N(1)$ снова делим на g и новый остаток даст предпоследнюю цифру g-ичной записи N. Продолжая этот процесс деления, найдем все цифры g-ичной записи.

Пример.
1. Перевести 121_{10} в троичную.
Переведем 121_{10} в троичную систему вот так:
Целая часть числа находится делением на основание новой



Получилось: $121_{10} = 11111_3$

6.4 Арифметические операции над систематическими числами

Сложение, вычитание, умножение и деление чисел в любой системе счисления производятся аналогично выполнению этих операций в привычной нам десятичной системе.

Для выполнения операций сложения и вычитания в системе счисления с основанием g надо знать таблицу сложения однозначных чисел в этой системе, а для выполнения операций умножения и деления – еще и таблицу умножения. Заметим, что роль «девятки» в двоичной системе выполняет цифра 1, в троичной – 2 и т.д., в g-ичной – цифра g-1.

Примеры:
1. Выполнить сложение 101_2+1101_2
Выполним сложение 101_2+1101_2

+		1	0	1
	1	1	0	1
1	0	0	1	0

Получилось: $101_2+1101_2 = 10010_2$

2. Выполнить вычитание 1244_8-456_8

Выполним вычитание 1244_8-456_8

-	1	2	4	4
		4	5	6
	0	5	6	6

Получилось: $1244_8-456_8 = 566_8$

3. Выполнить умножение 547_8*25_8

Выполним умножение 547_8*25_8

x			5	4	7
				2	5
+		3	4	0	3
	1	3	1	6	
	1	6	5	6	3

Получилось: $547_8*25_8 = 16563_8$

4. Выполнить деление $471222_8÷27_8$

Выполним деление $471222_8÷27_8$

$$
\begin{array}{l|l}
471222 & 27 \\
\underline{-27} & 15476 \\
201 & \\
\underline{-163} & \\
\;162 & \\
\;\underline{-134} & \\
\;\;262 & \\
\;\;\underline{-241} & \\
\;\;\;212 & \\
\;\;\;\underline{-212} & \\
\;\;\;\;\;0 &
\end{array}
$$

Получилось: $471222_8÷27_8 = 15476_8$

5. Запишем числа $a = 6467_8$, $b = 101_3$ в системе счисления с основанием g=5 и разделим большее на меньшее с остатком.

Решение:

$5 = 12_3$.

1)

$$\begin{array}{r|l} 6467_8 & 5 \\ \cline{2-2} 5 & 1244 \\ \hline 14 & \\ 12 & \\ \hline 26 & \\ 24 & \\ \hline 27 & \\ 24 & \\ \hline 3 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1244 & 5 \\ \cline{2-2} 12 & 207 \\ \hline 44 & \\ 43 & \\ \hline 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 207 & 5 \\ \cline{2-2} 17 & 33 \\ \hline 17 & \\ 17 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 33 & 5 \\ \cline{2-2} 31 & 5 \\ \hline 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ \cline{2-2} 5 & 1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$a = 6467_8 = 102013_5$.

2)

$$\begin{array}{r|l} 101_3 & 12_3 \\ \cline{2-2} 101 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$b = 101_3 = 20_5$.

3)

$$\begin{array}{r|l} 102013_5 & 20_5 \\ \cline{2-2} 40 & 2023_5 \\ \hline 120 & \\ 110 & \\ \hline 101 & \\ 40 & \\ \hline 113 & \\ 110 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

$102013_5 = 20_5 \cdot 2323_5 + 3$.

Ответ: $102013_5 = 20_5 \cdot 2323_5 + 3$.

6. Выразим систематические дроби в виде обыкновенных дробей, числители и знаменатели которых записаны в десятичной системе:

а) $2{,}3_4$; б) $0{,}04_5$; в) $2{,}012_3$.

Решение.

а) $2{,}3_4 = 2 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{11}{4}$;

б) $0{,}04_5 = 0 + \dfrac{0}{5} + \dfrac{0}{5^2} = \dfrac{4}{25}$;

в) $2{,}012_3 = 2 + \frac{0}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} = \frac{54+0+3+2}{27} = \frac{59}{27}$.

7. Запишем данные систематические дроби в виде обыкновенных в той же системе счисления:

а) $0{,}04_6$; б) $2{,}3_4$; в) $2{,}012_3$.

Решение.

а) $0{,}04_6 = \left(\frac{4}{100}\right)_6 = \left(\frac{1}{13}\right)_6$;

б) $2{,}3_4 = \left(\frac{23}{10}\right)_4$;

в) $2{,}012_3 = \left(\frac{2012}{1000}\right)_3$.

8. Запишем данные систематические дроби в виде обыкновенных в той же системе счисления:

а) $0{,}0(2)_4$; б) $0{,}1(4)_7$; в) $0{,}(23)_6$.

Решение.

а) $0{,}0(2)_4 = \left(\frac{2}{3\cdot 10}\right)_4 = \left(\frac{1}{3\cdot 2}\right)_4 = \left(\frac{1}{12}\right)_4$;

б) $0{,}1(4)_7 = \left(\frac{14-1}{6\cdot 10}\right)_7 = \left(\frac{13}{6\cdot 10}\right)_7 = \left(\frac{5}{30}\right)_7$;

в) $0{,}(23)_6 = \left(\frac{23}{55}\right)_6 = \left(\frac{3}{11}\right)_6$.

9. Представим обыкновенные дроби в виде систематических в той же системе счисления:

а) $\left(\frac{10}{8}\right)_{12}$; б) $\frac{137}{40}$; в) $\left(\frac{17}{40}\right)_8$.

Решение.

а)

$$\begin{array}{r|l} 10_{12} & 8 \\ \cline{2-2} -\ 8 & 1{,}6_{12} \\ \cline{1-1} 40 & \\ -\ 40 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$\left(\frac{10}{8}\right)_{12} = 1{,}6_{12}$

б)

$$
\begin{array}{r|l}
-\,137 & 40 \\
\underline{120} & 3{,}425 \\
-\,170 & \\
\underline{160} & \\
-\,100 & \\
\underline{80} & \\
-\,200 & \\
\underline{200} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$\frac{137}{40} = 3{,}425;$$

в)

$$
\begin{array}{r|l}
17_8 & 40 \\
-\,170 & 0{,}36_8 \\
\underline{140} & \\
-\,300 & \\
\underline{300} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$\left(\frac{17}{40}\right)_8 = 0{,}36_8 .$$

10. Разложим обыкновенные дроби в систематические в той системе счисления:

а) $\left(\frac{3}{5}\right)_{11}$; б) $\left(\frac{11}{12}\right)_4$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)_3$.

Решение.

а) Дробь $\left(\frac{3}{5}\right)_{11}$ нельзя разложить в конечную систематическую, так как число 5 не входит в качестве множителя в состав числа 11 – основания системы счисления. Поскольку (5, 11) = 1, то получится чисто периодическая систематическая дробь:

$$
\begin{array}{r|l}
3_{11} & 5 \\
-\,30 & 0{,}66\ldots \\
\underline{28} & \\
30 &
\end{array}
$$

т.е. $\left(\frac{3}{5}\right)_{11} = 0,(6)_{11}$

б) Так как $12_4 = 3_4 \cdot 2_4$, (3, 4) = 1, (2, 4) = 2, то при разложении данной дроби получится смешанная периодическая систематическая дробь:

$$\begin{array}{r|l} 11_4 & 12_4 \\ \cline{2-2} -\,110 & 0{,}311\ldots \\ \underline{102} & \\ -\,20 & \\ \underline{12} & \\ 20 & \end{array}$$

т.е. $\left(\frac{11}{12}\right)_4 = 0{,}3(1)_4$;

в) Так как (2, 3) = 1, то при разложении данной дроби получится чисто периодическая систематическая дробь:

$$\begin{array}{r|l} 1_3 & 2_3 \\ \cline{2-2} -\,10 & 0{,}11\ldots \\ \underline{2} & \\ 10 & \end{array}$$

т.е. $\left(\frac{1}{2}\right)_3 = 0,(1)_3$.

Контрольные вопросы:

1. В чем заключается сходство и различие между непозиционными и позиционными системами счисления?
2. Запишите в римской нумерации числа: 26, 55, 431, 587, 1973, 2003.
3. Запишите все цифры шестнадцатеричной системы счисления. Сколько их?
4. При записи числа $4023(10)(12)9_g$ использованы наименьшая и наибольшая цифры системы счисления. Чему равно основание g?
5. Запишите первые 37 чисел в девятеричной, одиннадцатеричной и четырнадцатеричной системах счисления.
6. Дайте теоретической обоснование перехода от одной системы счисления к другой.
7. Докажите, что число, записанное в двенадцатеричной системе счисления, делится на 11 в том и только в том случае, когда сумма его цифр делится на 11.
8. Докажите, что число, записанное в двенадцатеричной системе счисления, делится на 4 в том и только в том случае, когда его последняя цифра делится на 4.
9. Выведите признак делимости на $g-1$ в g-ичной системе счисления.
10. В какой системе счисления число 46 изобразится теми же цифрами, но в обратном порядке?

Упражнения для самостоятельного решения:

Запишите числа a и b в системе счисления с основанием g и выполните сложение, вычитание, умножение, и разделите большее на меньшее:

1) a=17533, b=425, g=7;
2) $a=121_3$, b=3755, g=8;
3) a=12, $b=15_7$, g=5;
4) $a=111_2$, b=14, g=3;
5) $a=201_5$, $b=6514_7$, g=4;
6) a=15, b=4321, g=6;
7) a=17, $b=443_8$, g=7;
8) $a=133_5$, $b=101_2$, g=12;
9) $a=114_5$, b=47, g=8;
10) $a=7356_8$, $b=55_7$, g=9;

Выразите систематические дроби в виде обыкновенных дробей, числители и знаменатели которых записаны в десятичной системе счисления:

11) $2,144_8$;
12) $23,45_6$;
13) $150,15_7$;
14) 10,11;
15) $4,233_5$;
16) $79,25_{11}$;
17) $17,443_8$;
18) $65,133_5$;
19) $0,114_5$;
20) $1,7356_8$;

Выразите данные систематические дроби в виде обыкновенных дробей в той же системе счисления:

21) $2,144_8$;
22) $23,45_6$;
23) $150,15_7$;
24) 10,11;
25) $4,233_5$;
26) $79,25_{11}$;
27) $17,443_8$;
28) $11,02_8$;
29) $20,43_6$;
30) $1,7356_8$;

31) Составьте таблицы сложения и умножения однозначных чисел в системах с основанием g=5, g=8, g=11;

Представьте обыкновенные дроби в виде систематических в той же системе счисления:

32) $\left(\frac{111}{100}\right)_3$;

33) $\left(\frac{211}{100}\right)_5$;

34) $\left(\frac{25}{122}\right)_6$;

35) $\left(\frac{151}{40}\right)_6$;

36) $\left(\frac{32}{47}\right)_8$;

37) $\left(\frac{16}{24}\right)_7$;

38) $\left(\frac{103}{13}\right)_5$;

39) $\left(\frac{1}{7}\right)_8$;

40) $\left(\frac{65}{23}\right)_8$;

41) $\left(\frac{331}{40}\right)_9$;

42) $\left(\frac{23}{33}\right)_4$;

43) $\left(\frac{125}{7}\right)_8$;

44) $\left(\frac{203}{11}\right)_5$;

45) $\left(\frac{17}{20}\right)_9$;

46) $\left(\dfrac{151}{30}\right)_7$.

7 Числовые функции

7.1 Число и сумма натуральных делителей

Рассмотрим некоторые функции, заданные на множестве натуральных чисел и связанные с арифметической природой этих чисел. Их называют числовыми функциями. Примерами таких функций могут служить:

1) число $\tau(n)$ всех натуральных делителей n;

2) сумма $\sigma(n)$ всех натуральных делителей n;

3) число $\varphi(n)$ натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n (функция Эйлера).

Выведем формулу, позволяющую вычислить $\tau(n)$, зная каноническое разложение n:

$$n = p_1^{l_1} \cdots p_m^{l_m}$$

где для любого j, $1 \le j \le m$, выполняются неравенства $0 \le l_j \le k_j$. Поэтому показатель l_1 может принимать $k_1 + 1$ различных значений: $0,1,...,k_j$, показатель l_2 может принимать $k_2 + 1$ различное значение, …, показатель l_m принимает $k_m + 1$ различных значений. Иными словами, в кортеже $(l_1,...,l_m)$ первая координата может принимать $(k_1 + 1)$ значений, вторая - $(k_2 + 1)$ значений, …, m-я - $(k_m + 1)$ значений. Число таких кортежей равно $(k_1 + 1)(k_2 + 1)\cdots(k_m + 1)$.

Мы доказали теорему:

Теорема 1. Если каноническая запись числа n имеет вид: $n = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdots p_m^{l_m}$, то число натуральных делителей n равно:

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)\cdots(k_m + 1) \qquad (1)$$

Пример. Вычислить $\tau(140)$.

Решение. Поскольку $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, то $\tau(140) = (2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 3\cdot 2\cdot 2 = 12$. Делителями числа 140 являются 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70, 140. Их число действительно равно 12.

Теперь выведем формулу для $\sigma(n)$ - суммы всех натуральных делителей. Пусть $n = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdots p_m^{l_m}$. Рассмотрим произведение

$$(1 + p_1 + \cdots + p_1^{k_1})(1 + p_2 + \cdots + p_2^{k_2})\cdots(1 + p_m + \cdots + p_m^{k_m}) \qquad (2)$$

Если раскрыть скобки, то получим сумму вида $p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdots p_m^{l_m}$, где при любом j, $1 \le j \le m$ выполняется неравенство $0 \le l_j \le k_j$. Но такие члены являются делителями n, причем каждый делитель входит в сумму только один раз. Поэтому произведение (2) равно сумме всех делителей n, т.е. $\sigma(n)$. Итак,

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \cdots + p_1^{k_1})(1 + p_2 + \cdots + p_2^{k_2}) \cdots (1 + p_m + \cdots + p_m^{k_m}).$$

Но каждая сумма $1 + p_j + \cdots + p_j^{k_j}$ является суммой геометрической прогрессии, получаем, что

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_m^{k_m+1} - 1}{p_m - 1} \quad (3)$$

Доказали следующую теорему.

Теорема 2. Если каноническая запись числа n имеет вид $n = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdots p_m^{l_m}$, то $\sigma(n)$ выражается формулой (3).

Пример. Вычислить сумму натуральных делителей числа 350.

Решение. Так как $350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$, то $\sigma(350) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^3 - 1}{5 - 1} \cdot \frac{7^2 - 1}{7 - 1} = 3 \cdot 31 \cdot 8 = 744$.

Пример. Вычислить $\tau(\sigma(24))$.

Решение. Так как $24 = 2^3 \cdot 3$, то $\sigma(24) = \sigma(2^3 \cdot 3) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = 15 \cdot 4 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

Тогда $\tau(\sigma(24)) = \tau(2^2 \cdot 3 \cdot 5) = (2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Контрольные вопросы:

1. Напишите формулу для количества делителей числа $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$. Напишите формулу для суммы его делителей.
2. Напишите формулу для суммы кубов делителей числа n.
3. Напишите формулу, частными случаями которой являются формулы для $\tau(n)$ и $\sigma(n)$.
4. На какую степень 7 делится $500!$?
5. Найдите число натуральных чисел, не превосходящих 471,8 и делящихся на 7.
6. Найдите количество натуральных чисел на отрезке от 165 до 926,1, делящихся на 11.

Упражнения для самостоятельного решения:

Вычислить:

1) $\tau(50)$;

2) $\tau(100)$;

3) $\tau(150)$;

4) $\tau(200)$;

5) $\tau(155)$;

6) $\tau(175)$;

7) $\tau(166)$;

8) $\tau(201)$;

9) $\tau(755)$;

10) $\tau(800)$;

11) $\tau(421)$;

12) $\tau(127)$;

13) $\tau(789)$;

14) $\tau(353)$;

15) $\tau(864)$;

16) $\tau(\sigma(16))!$;

17) $\sigma(45)!$;

18) $\tau(\sigma(9))!$;

19) $\tau\left(\frac{10!}{5!5!}\right)$;

20) $\tau\left(\frac{12!}{4!8!}\right)$;

21) $\tau\left(\frac{15!}{5!10!}\right)$;

22) $\sigma\left(\frac{10!}{5!5!}\right)$;

23) $\sigma\left(\frac{12!}{4!8!}\right)$;

24) $\sigma\left(\frac{15!}{5!10!}\right)$;

Делится ли:

25) $\tau(\sigma(50))!\, на\, (\sigma(20))^6$;

26) $\tau(\sigma(85))!\, на\, (\sigma(60))^5$;

27) $\tau(\sigma(16))!\, на\, (\sigma(7))^6$;

28) $\tau(\sigma(24))!\, на\, (\sigma(12))^3$;

29) $\tau(\sigma(201))!\, на\, (\sigma(120))^4$;

30) $\tau(\sigma(88))!\, на\, (\sigma(15))^8$;

31) $\tau(\sigma(90))!\, на\, (\sigma(13))^6$;

32) $\tau(\sigma(63))!\, на\, (\sigma(9))^9$;

33) $\sigma(\tau(50))!\, на\, (\tau(20))^6$;

34) $\sigma(\tau(169))!\, на\, (\tau(30))^7$;

35) $\sigma(\tau(133))!\, на\, (\tau(13))^5$;

36) $\sigma(\tau(255))!\, на\, (\tau(10))^5$;

37) $\sigma(\tau(41))!\, на\, (\tau(4))^9$;

38) $\sigma(\tau(24))!\, на\, (\tau(6))^4$;

39) $\sigma(\tau(200))!\, на\, (\tau(20))^{20}$;

40) $\sigma(\tau(24))!\, на\, (\tau(4))^{12}$;

Является ли целым число:

41) $\dfrac{\sigma(12)!}{\tau(\sigma(12))!}$;

42) $\dfrac{\sigma(18)!}{\tau(\sigma(18))!}$;

43) $\dfrac{12!}{\tau(\sigma(12))!}$;

44) $\dfrac{22!}{\tau(\sigma(14))!}$;

45) $\dfrac{43!}{\tau(\sigma(41))!}$;

46) $\dfrac{\tau(16)!}{\tau(\sigma(16))!}$;

47) $\dfrac{\sigma(25)!}{\tau(15)!}$;

48) $\dfrac{\tau(155)!}{\tau(\sigma(75))!}$;

49) $\dfrac{\sigma(45)!}{\tau(\sigma(9))!}$;

50) $\dfrac{\sigma(147)!}{\tau(\sigma(23))!}$;

51) $\dfrac{\sigma(256)!}{\tau(75)!}$;

52) $\dfrac{\sigma(12!)}{\tau(12)!}$;

53) $\dfrac{\sigma(9!)}{\tau(4)!}$;

54) $\dfrac{\sigma(8!)}{\tau(45)!}$;

55) $\dfrac{\sigma(11!)}{\tau(11)!}$;

Решите уравнение:

56) $\tau(5x)=\tau(7x)$;

57) $\tau(2x)=\tau(11x)$;

58) $\tau(13x)=\tau(17x)$;

59) $\tau(15x)=\tau(37x)$;

60) $\tau(11x)=\tau(17x)$;

61) $\tau(x)=\tau(7x)$;

62) $\tau(14x)=\tau(13x)$;

63) $\sigma(x)=x$;

64) $\sigma(x)=x+1$;

65) $\sigma(x)=x+2$;

66) $\sigma(x)=x+3$;

67) $\sigma(x)=x+4$;

68) $\sigma(x)=x+5$;

69) $\sigma(x)=x+6$;

70) $\sigma(x)=x+7$

7.2 Мультипликативные числовые функции

Формулы для $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ являются частными случаями более общей формулы, связанной с так называемыми мультипликативными числовыми функциями.

Определение 1. Числовая функция $\theta(n)$ называется ***мультипликативной***, если:

1) $\theta(n)$ определена для всех натуральных n, причем $\theta(n)=1$;

2) Для любых взаимно простых натуральных чисел n и m выполняется равенство

$$\theta(mn)=\theta(m)\cdot\theta(n). \quad (1)$$

Примером мультипликативной функции может служить функция $\theta(n)=n^{\lambda}$, где λ - любое число, а $n\in N$. В самом деле, $\theta(1)=1^{\lambda}=1$ и для любых натуральных m и n (даже не взаимно простых) выполняется равенство:

$$\theta(mn)=(mn)^{\lambda}=m^{\lambda}n^{\lambda}=\theta(m)\cdot\theta(n)$$

Докажем следующие свойства мультипликативных функций:

Теорема 3. *Если числа* $n_1,\ldots,n_m$ *попарно взаимно просты, а* $\theta(n)$ - *мультипликативная функция, то*

$$\theta(n_1 \ldots n_m) = \theta(n_1) \ldots \theta(n_m) \qquad (2)$$

Доказательство проведем с помощью математической индукции. При $m = 2$ равенство (2) справедливо по определению мультипликативности. Пусть уже доказано, что оно верно при $m = j$, и пусть $n_1,\ldots,n_j,n_{j+1}$ – любые попарно взаимно простые числа. Тогда числа $n_1,\ldots,n_j$ и n_{j+1} взаимно просты, и поэтому

$$\theta(n_1 \ldots n_j n_{j+1}) = \theta(n_1 \ldots n_j) \cdot \theta(n_{j+1}).$$

Но, поскольку равенство (2) верно при $m = j$, то $\theta(n_1 \ldots n_j) = \theta(n_1) \cdot \ldots \cdot \theta(n_j)$, и потому

$$\theta(n_1 \ldots n_j n_{j+1}) = \theta(n_1) \cdot \ldots \theta(n_j) \cdot \theta(n_{j+1}).$$

Итак, равенство (2) верно при $m=2$ и из его справедливости при $m=j$ следует справедливость и при $m = j+1$. Значит, равенство (2) верно для любого числа попарно взаимно простых сомножителей.

Следствие. *Если каноническая запись числа n имеет вид* $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ *и* $\theta(n)$ *- мультипликативная функция, то*

$$\sum_{d/n} \theta(n) = \left[1 + \theta(p_1) + \ldots + \theta(p_1^{k_1})\right] \ldots \left[1 + \theta(p_m) + \ldots + \theta(p_m^{k_m})\right], \qquad (3)$$

Где слева сумма распространена на все делители числа d.

Доказательство. Для доказательства формулы (3) достаточно раскрыть скобки в правой части и принять во внимание, что по теореме 4

$$\theta(p_1^{l_1}) \ldots \theta(p_m^{l_m}) = \theta(p_1^{l_1} \ldots p_m^{l_m})$$

Причем $p_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{l_m}$ – делитель числа $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$.

Формулы для $\tau(n)$ и $\sigma(n)$, выведенные выше, являются частными случаями общей формулы (3). Чтобы вывести формулу для $\tau(n)$, надо положить $\theta(n) = 1$. Тогда слева получится сумма единиц, причем число слагаемых равно числу делителей n, т.е. $\tau(n)$, а справа – произведение чисел $(k_1+1),\ldots,(k_m+1)$. А формула для $\sigma(n)$ получается, если положить $\theta(n) = n$ (эта функция мультипликативна). Тогда слева получится сумма всех делителей n, т.е. $\sigma(n)$, а справа – произведение $\left(1 + p_1 + \ldots + p_1^{k_1}\right) \ldots \left(1 + p_m + \ldots + p_m^{k_m}\right)$.

С помощью формулы (3) можно получить и новые формулы. Например, полагая $\theta(n) = n^{\lambda}$, выводим, что при $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$

$$\sum_{d/n} d^{\lambda} = \left(1 + p_1^{\lambda} + \ldots + p_1^{\lambda k_1}\right) \ldots \left(1 + p_m^{\lambda} + \ldots + p_m^{\lambda k_m}\right) = \frac{p_1^{\lambda(k_1+1)} - 1}{p_1^{\lambda} - 1} \ldots \frac{p_m^{\lambda(k_m+1)} - 1}{p_m^{\lambda} - 1}. \qquad (4)$$

Теорема 5. *Если* $\theta_1(n)$ *и* $\theta_2(n)$ – *мультипликативные функции, то их произведение* $\theta_1(n) \cdot \theta_2(n) = \theta(n)$ *тоже является мультипликативной функцией.*

Доказательство. *Мы имеем* $\theta(1)=\theta_1(1)\cdot\theta_2(1)=1\cdot 1=1$*, и если* $(m,n)=1$*, то* $\theta(mn)=\theta_1(mn)\cdot\theta_2(mn)=\theta_1(m)\cdot\theta_1(n)\cdot\theta_2(m)\cdot\theta_2(n)=\theta(m)\cdot\theta(n)$.

Пример. Проверить, что функция $f(n)=\dfrac{1}{n^3}$ является мультипликативной.

Решение. Функция $f(n)=\dfrac{1}{n^3}$ является мультипликативной, так как для любых натуральных *m и n* имеет место равенство: $f(mn)=\dfrac{1}{(mn)^3}=\dfrac{1}{m^3}\cdot\dfrac{1}{n^3}=f(m)\cdot f(n)$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется мультипликативной функцией? Приведите примеры.
2. Перечислите свойства мультипликативной функции.

Упражнения для самостоятельного решения:

Является ли мультипликативной функция:

1) $f(n)=(n,6)$;
2) $f(n)=[n,6]$;
3) $f(n)=\sin\pi n$;
4) $f(n)=\cos\pi n$;
5) $f(n)=\sin 2\pi n$;
6) $f(n)=\cos 2\pi n$;
7) $f(n)=\sin\dfrac{\pi n}{2}$;
8) $f(n)=\cos\dfrac{\pi n}{2}$;
9) $f(n)=\sin\dfrac{\pi n}{3}$;
10) $f(n)=\cos\dfrac{\pi n}{3}$;
11) $f(n)=\cos\dfrac{\pi n}{3}$;
12) $f(n)=[n,7]$;

8 Функция $E(x)$ ($\lfloor x \rfloor$), $\{x\}$ и ее применение в теории чисел

В курсе математического анализа рассматривалась функция $y = E(x)$ – целая часть x. Она определяется так: если $n \le x < n+1,\ n \in Z$, то $E(x) = n$.

Например,

$$E(7{,}25) = 7,\ E(\pi) = 3,\ E(-4{,}75) = -5,\ E(0) = 0.$$

Разность $x - E(x)$ обозначают (x) и называют дробной частью числа x. Например, $(7{,}81) = 0{,}81$.

Пусть m и n – натуральные числа. Покажем, что количество натуральных чисел, кратных m и не превосходящих n, равно $E\left(\frac{n}{m}\right)$.

В самом деле, если $n = mq + r$, где $0 \le r < m$, то такими кратными являются числа $m, 2m, \ldots, qm$. Их количество равно q. Но, с другой стороны, из $n = mq + r$ следует, что $\frac{n}{m} = q + \frac{r}{m}$. Так как $0 \le \frac{r}{m} < 1$, то $E\left(\frac{n}{m}\right)$ тоже равно q. Утверждение доказано.

Теорема 6. Показатель, с которым простое число входит в каноническое представление числа $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, равен

$$E\left(\frac{n}{p}\right) + E\left(\frac{n}{p^2}\right) + \ldots + E\left(\frac{n}{p^k}\right) + \ldots \qquad (1)$$

(в сумме (1) отличны от нуля лишь члены, для которых $n \ge p^k$, поэтому если $p^s \le n < p^{s+1}$, то последним, отличным от нуля членом будет $E\left(\frac{n}{p^s}\right)$.

Доказательство. Среди чисел 1, 2, …, n есть $E\left(\frac{n}{p}\right)$ чисел, кратных p, $E\left(\frac{n}{p^2}\right)$ – кратных $p^2, \ldots, E\left(\frac{n}{p^k}\right)$ – кратных p^k, и т.д. Поэтому количество чисел, кратных p, но не кратных p^2, равно $E\left(\frac{n}{p}\right) - E\left(\frac{n}{p^2}\right)$, чисел, кратных p^2, но не кратных p^3, равно $E\left(\frac{n}{p^2}\right) - E\left(\frac{n}{p^3}\right)$ и т.д.

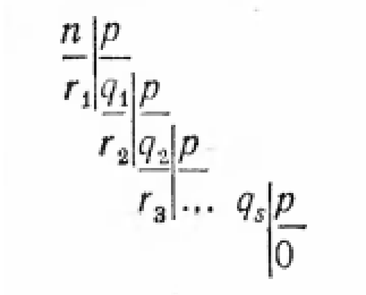
Каждое число 1, 2, …, n кратное p, но не кратное p^2, дает в произведении $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ один простой множитель, равный p. Числа, кратные p^2, но не кратные p^3, дают два таких множителя и т.д. Поэтому общее число простых множителей, равных p, в каноническом выражении числа $n!$ таково:

$$c = E\left(\frac{n}{p}\right) - E\left(\frac{n}{p^2}\right) + 2\left[E\left(\frac{n}{p^2}\right) - E\left(\frac{n}{p^3}\right)\right] + 3\left[E\left(\frac{n}{p^3}\right) - E\left(\frac{n}{p^4}\right)\right] + \ldots$$
$$+ k\left[E\left(\frac{n}{p^k}\right) - E\left(\frac{n}{p^{k+1}}\right)\right] + \ldots$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим сумму:

$$c = E\left(\frac{n}{p}\right) + E\left(\frac{n}{p^2}\right) + \ldots + E\left(\frac{n}{p^k}\right) + \ldots$$

Вычисления удобно располагать следующим образом:



Тогда

$$c = q_1 + q_2 + \ldots + q_s .$$

При этом деление ведется до тех пор, пока не получим частного, меньшего p .

8.1 Свойства функций $\lfloor x \rfloor$ и $\{x\}$

1. $[x] \le x < [x] + 1$ для любого действительного числа x с равенством слева, если и только если x -целое число.

2. $[k + x] = k + [x]$ для любого целого k и любого действительного x .

3.Если x -действительное число и n -целое число, то $n \le x$, если и только если $n \le [x]$.

4. $\left|\{n \in N : n \le x, d\mathrm{I}n\}\right| = [x / d]$ для любого положительного действительного числа x и для любого натурального числа d .

5. $\left[[x]\right] = [x]$ для любого действительного числа x .

6. $[x / d] = \left[[x] / d\right]$ для любого положительного действительного числа x и любого натурального числа d .

7. $[x] - 2[x / 2] = 0$ или 1 для любого действительного x .

8. $n! = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$, где p_i пробегает все простые числа, не превосходящие n и $k_i = [n / p_i] + \left[n / p_i^2\right] + \left[n / p_i^3\right] + \ldots$

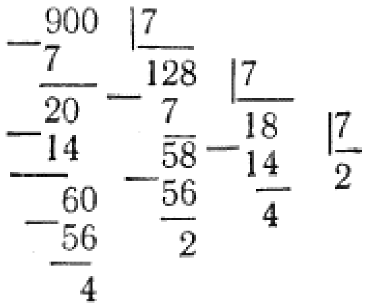
9. $0 \le \{x\} < 1$ для любого действительного x с равенством слева, если и только если x -целое число.

10. $\{k+x\}=\{x\}$ для любого целого k и любого действительного числа x.

Примеры:

1. На какую наивысшую степень 7 делится число 900!?

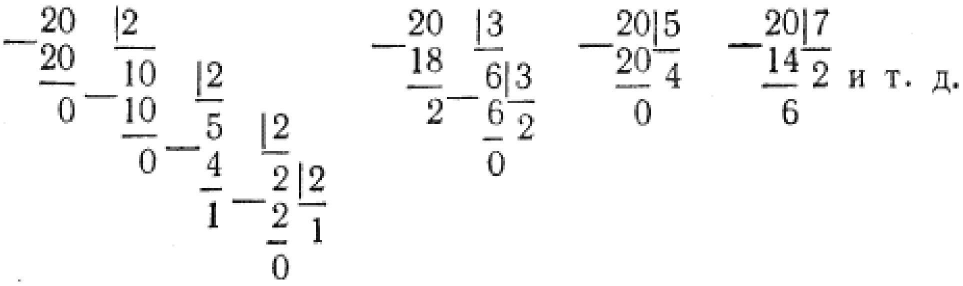
Решение. Здесь n = 900, p = 7. Поэтому



Находим: $\alpha=128+18+2=148$, а соответствующая степень 7^{148}.

2. Найдем каноническое разложение числа 20!

Решение. В каноническое разложение числа 20! Входят только степени простых чисел, не превосходящих 20, т.е. степени чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Найдем показатели, с которыми эти простые числа входят в разложение числа 20!



10+5+2+1=18; 6+2=8 и т.д.

Окончательно находим: $20!=2^{18}\cdot 3^{8}\cdot 5^{4}\cdot 7^{2}\cdot 11^{1}\cdot 13^{1}\cdot 17^{1}\cdot 19^{1}$. Функция дробная часть x, обозначаемая $\{x\}$, определяется как $\{x\}=x-[x]$. Например, $\{2,9\}=0,9$, $\{-2\}=0$, $\{-2,3\}=0,7$.

3. Сколько натуральных чисел, не превосходящих 1000, не делится ни на 5, ни на 7?

Решение. Легко видеть, что $\left|\{n\in N: n\le 1000, 5 \mid n\}\right|=[1000/5]=200$; $\left|\{n\in N: n\le 1000, 7 \mid n\}\right|=[1000/7]=142$; $\left|\{n\in N: n\le 1000, 35 \mid n\}\right|=[1000/35]=28$. Тогда $\left|\{n\in N: n\le 1000, 5\nmid n, 7\nmid n\}\right|=1000-[1000/5]-[1000/7]+[1000/35]$ =1000-200-142+28=686.

4. Сколькими нулями оканчивается число 2000! В пятнадцатиричной системе счисления?

Решение. Для нахождения нулей, на которые оканчивается 2000! В 15-й системе счисления, достаточно выяснить, сколько раз в каноническое разложение числа 2000! Входит число 5: нуль на конце 15-й записи числа обеспечивается наличием в каноническом разложении данного числа множителя 15=3*5, а число $\left[2000/5\right]+\left[2000/5^2\right]+\dots$ пятерок в каноническом разложении числа 2000! меньше, чем число $\left[2000/3\right]+\left[2000/3^2\right]+\dots$ троек. Искомая величина равна $\left[2000/5\right]+\left[2000/5^2\right]+\left[2000/5^3\right]+\dots$ =400+80+16+3+0=499. Таким образом, число 2000! Оканчивается в 15-й системе счисления 499 нулями.

5. Решите уравнение $\left[x\right]=1+2\left\{x\right\}$.

Решение Достаточно заметить, что число $1+2\left\{x\right\}$ обязано быть целым и, следовательно $\left\{x\right\}=0$ или $\left\{x\right\}=0,5$. В первом случае $\left[x\right]=1$, то есть $x=\left[x\right]+\left\{x\right\}=1+0=1$. Во втором случае $\left[x\right]=2$, то есть $x=\left[x\right]+\left\{x\right\}=2+0,5=2,5$. Таким образом, решениями уравнения $\left[x\right]=1+2\left\{x\right\}$ являются числа 1 и 2,5.

Контрольные вопросы:

1. Решите уравнение $E\left(2ax\right)=m$, где $a\neq 0$ и x - действительные числа.
2. Найдите, при каком целом положительном m выполняются соотношения $E\left(32,6m\right)=97$, $E\left(27,4m\right)=140$.
3. Докажите, что $E\left(x\right)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)=E\left(2x\right)$ для любого действительного x .
4. Сколькими нулями оканчивается числа 100!, 35!, 8156!.

Упражнения для самостоятельного решения:

1) Сколько натуральных чисел, не превосходящих 150, не делится на на 2, ни на 5?
2) Сколько натуральных чисел, не превосходящих 660, не делится на на 3, ни на 11?
3) Сколько натуральных чисел, не превосходящих 755, не делится на на 3, ни на 13?
4) Сколько натуральных чисел, не превосходящих 6330, не делится на на 2, ни на 3, ни на 5?
5) Сколько двузначных чисел не делится ни на 2, ни на 5?
6) Сколько двузначных чисел не делится ни на 7, ни на 11?

7) Сколько двузначных чисел не делится ни на 11, ни на 13?
8) Сколько двузначных чисел не делится ни на 17, ни на 23?
9) Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 300 и взаимно простых с 155?
10) Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 455 и взаимно простых с 225?
11) Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 150 и взаимно простых с 36?
12) Сколько существует трехзначных натуральных чисел, взаимно простых с 900?
13) Сколько существует трехзначных натуральных чисел, взаимно простых с 660?
14) Сколько существует трехзначных натуральных чисел, взаимно простых с 700?
15) Сколько существует трехзначных натуральных чисел, взаимно простых с 1000?
16) Сколько существует трехзначных натуральных чисел, взаимно простых с 1200?

Запишите каноническое разложение чисел:

17) $15!$;
18) $17!$;
19) $19!$;
20) $20!$;
21) $22!$;
22) $\frac{20!}{10!10!}$;
23) $\frac{18!}{9!9!}$;
24) $\frac{18!}{10!8!}$;
25) $\frac{20!}{16!4!}$;
26) $\frac{22!}{11!11!}$;
27) $\frac{22!}{16!6!}$;
28) $\frac{14!}{7!7!}$;
29) $\frac{24!}{12!12!}$;
30) $\frac{24!}{18!6!}$;
31) $\frac{25!}{13!12!}$;
32) $\frac{32!}{15!17!}$;

Делится ли:

33) $22! \text{ }на\text{ } 11^{11}$;
34) $100! \text{ }на\text{ } 20^{20}$;
35) $100! \text{ }на\text{ } 40^{40}$;

36) $99!\ \text{на}\ 30^{30}$;

37) $150!\ \text{на}\ 50^{50}$;

38) $200!\ \text{на}\ 50^{50}$;

39) $350!\ \text{на}\ 100^{50}$;

40) $450!\ \text{на}\ 100^{50}$;

41) $\dfrac{200!}{100!100!}$ на 50^{50};

42) $\dfrac{200!}{120!80!}$ на 60^{60};

43) $\dfrac{100!}{50!50!}$ на 60^{60};

44) $\dfrac{150!}{50!50!}$ на 100^{10};

45) $\dfrac{150!}{75!75!}$ на 100^{10};

46) $\dfrac{600!}{300!300!}$ на 200^{10};

47) $\dfrac{300!}{100!200!}$ на 55^{20};

48) $\dfrac{220!}{100!120!}$ на 150^{15};

Решите уравнение:

49) $[x]=-3$;

50) $[2x]=3$;

51) $[2x]=5$;

52) $\left[x^2+2x-1\right]=3$;

53) $\left[x^2-7x-1\right]=x+1$;

54) $\{x\}=0,2$;

55) $\{x\}=0,3$;

56) $\{2x\}=0,4$;

57) $\{x^2+5\}=0$;

58) $\{x\}=[x+13]$;

59) $[x]=5+3\{x\}$;

60) $\{x\}=[x]$;

61) $3\{x\}=[x]$;

62) $\dfrac{x-2}{5}=\{x\}$;

63) $\dfrac{x+3}{7}=\{x\}$;

64) $2\{x\}=[x]$;

9 Функция Эйлера. Теоремы Эйлера и Ферма

9.1 Функция Эйлера

Обозначим через $\varphi(m)$ число классов вычетов по модулю m, взаимно простых с m, т.е. число элементов приведенной системы вычетов по модулю m. Ее называют функцией Эйлера.

Выберем в качестве представителей классов вычетов по модулю m числа 1,2,3, .., m -1. Тогда $\varphi(m)$ - количество таких чисел, взаимно простых с m. Иными словами, $\varphi(m)$ - количество положительных чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m.

Примеры.

1. Пусть m =8. Полная система вычетов по модулю 8 состоит из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Из них взаимно просты с 8 числа 1, 3, 5, 7. Так как количество этих чисел равно 4, то $\varphi(8)=4$.

2.Пусть m =11. Полная система вычетов состоит из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Из них взаимно просты с 11 числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Значит $\varphi(11)=10$.

При m =1 полная система вычетов состоит из одного класса $\overline{1}$. Общим натуральным делителем чисел 1 и 1 является 1, (1,1)-1. На этом основании полагают $\varphi(1)=1$.

Перейдем к вычислению функции Эйлера.

1) Если $m=p$ - простое число, то $\varphi(p)=p-1$.

Доказательство. Вычеты 1, 2, 3, …, $p-1$ и только они взаимно просты с простым числом p. Поэтому $\varphi(p)=p-1$.

2) Если $m=p^k$ -степень простого числа p, то $\varphi(m)=p^{k-1}(p-1)$ (1)

Доказательство. Полная система вычетов по модулю $m=p^k$ состоит из p^k чисел 1, …, p^k-1, p^k. Натуральные делители m являются степенями

p. Поэтому число a может иметь общий делитель с m, отличный от 1, лишь в том случае, когда a делится на p. Но среди чисел 1, 2, .., p^k-1 на p делятся лишь числа p, $2p$, …, p^2, …, p^2, количество которых равно p^2 : $p = p^{k-1}$. Значит, взаимно просты с $m = p^k$ остальные $p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1)$. Тем самым доказано, что $\varphi(m) = p^{k-1}(p-1)$.

Теорема 1. Функция Эйлера мультипликативна, т.е. для взаимно простых чисел m и n имеем $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Доказательство. Первое требование в определении мультипликативной функции выполняется тривиальным образом: функция Эйлера определена для всех натуральных чисел, причем $\varphi(1) = 1$. Нам надо лишь показать, что если m и n взаимно простые числа,

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n) \tag{2}$$

Расположим полную систему вычетов по модулю mn в виде $m \times n$-матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ m+1 & m+2 & 2m \\ \dots & \dots & \dots \\ (n-1)m+1 & (n-1)m+2 & mn \end{pmatrix}$$

Поскольку m и n взаимно просты, то число взаимно просто с mn тогда и только тогда, когда x взаимно просто с m и x взаимно просто с n. Но число $km+t$ взаимно просто с m в том и только в том случае, когда t взаимно просто с m. Поэтому числа, взаимно простые с m, располагаются в тех столбцах, для которых t пробегает приведенную систему вычетов по модулю m. Число таких столбцов равно $\varphi(m)$. В каждом столбце представлена полная система вычетов по модулю n. Из этих вычетов $\varphi(n)$ взаимно просты с n. Значит, общее количество чисел, взаимно простых и с m и с n, равно $\varphi(m)\varphi(n)$. Эти числа, и только они, взаимно просты с mn. Тем самым доказано, что $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Вычислим значение функции Эйлера $\varphi(m)$, зная каноническое представление числа m : $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. В силу мультипликативности $\varphi(m)$ имеем: $\varphi(m) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdots \varphi(p_k^{\alpha_k})$.

По формуле (1) получаем, что $\varphi(p_j^{\alpha_j}) = p_j^{\alpha_j - 1}(p_j - 1)$ и потому

$$\varphi(m) = p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_1 - 1) \cdots (p_k - 1) \tag{3}$$

Равенство (3) можно переписать в виде: $\varphi(m) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}(1 - \dfrac{1}{p_1}) \cdots (1 - \dfrac{1}{p_k})$.

Поскольку $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = m$, то

$$\varphi(m) = m(1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_k}) \qquad (4).$$

Формула (3) или, что-то же самое (4) и являются искомой.

Примеры.

1. Вычислить $\varphi(24)$, $\varphi(5600)$

Решение.

Поскольку среди чисел 1, 2, 3, …, 24 ровно 8 чисел (именно, 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23) взаимно просты с 24, то по определению $\varphi(24)=8$. Если воспользоваться формулой: $\varphi(24)=\varphi(2^3\cdot 3)=24\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})=8$.

Поскольку $5600=2^5\cdot 5^2\cdot 7$, то имеем $\varphi\left(5600\right)=\varphi\left(2^5\cdot 5^2\cdot 7\right)=5600\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{5})\cdot(1-\frac{1}{7})=1920$

2. Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем 220?

Решение. Дробь $\frac{\alpha}{220}$ является правильной несократимой дробью тогда и только тогда, когда $\alpha\in N, \alpha<220 и \left(\alpha, 220\right)=1$. Число таких дробей равно $\varphi\left(220\right)$. Поскольку $\varphi\left(220\right)=\varphi\left(2^2\cdot 5\cdot 11\right)=220\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{5})\cdot(1-\frac{1}{11})=80$, то и правильных несократимых дробей со знаменателем 220 равно 80.

9.2 Теоремы Эйлера и Ферма

Перейдем к изучению группы Γ_m делителей единицы в кольце вычетов Z_m. Эта группа коммутативна и содержит $\varphi(m)$ элементов. Любой элемент a группы Γ_m порождает циклическую подгруппу, порядок s которой по теореме Лагранжа является делителем числа $\varphi(m)$, $\varphi(m)=st$ (число s называют порядком класса $\bar{a}$). Так как $\overline{a^s}=\bar{1}$, то $\bar{a}^{\varphi(m)}=\bar{a}^{st}=\left(\bar{a}^s\right)^t=\bar{1}^t=\bar{1}$. Для любого класса вычетов $\bar{a}\in\Gamma_m$ выполняется равенство $\bar{a}^{\varphi(m)}=\bar{1}$.

Обычно это утверждение формулируется на языке сравнений: вместо равенства $\bar{a}^{\varphi(m)}=\bar{1}$ пишут сравнение $a^{\varphi(m)}\equiv 1$(mod m).

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 11 (Эйлера). Если a - такое число, что (a, m) = 1,то $a^{\varphi(m)}\equiv 1$(mod m).

Особенно простой вид теорема Эйлера принимает, если $m = p$ - простое число. В этом случае $\varphi(p) = p-1$, а потому получаем следующее утверждение:

Теорема 12 (малая теорема Ферма). Если p - простое число и a - целое число, такое, что $(a, p) = 1$, то

$$a^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p).$$

Часто используется следствие малой теоремы Ферма. Если p - простое число, то для любого целого числа a имеет место сравнение:

$$a^p \equiv a (\text{mod } p).$$

Доказательство. а) Если $(a, p) = 1$, то согласно теореме Ферма $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p). После умножения обеих частей этого равенства на a, получим: $a^p \equiv a$ (mod p).

б) Если $(a, p) \neq 1$, то a делится на p. Но тогда и произведение $a\left(a^{p-1}-1\right) = a^p - a$.

тоже делится на p, т.е. $a^p - a \equiv 0$ (mod p), или $a^p \equiv a$ (mod p).

Итак, для любого целого числа a имеем:

$$a^p \equiv a \ (\text{mod } p).$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение функции Эйлера. Что означает символ $\varphi(m)$?
2. Какими основными свойствами обладает функция Эйлера?
3. Напишите выражение для $\varphi(m)$ по каноническому разложению числа m. Вычислите, пользуясь этим выражением, $\varphi(100)$, $\varphi(75)$, $\varphi(114)$.
4. Чему равна сумма: $\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(6)+\varphi(9)+\varphi(18)$?
5. Сколько натуральных чисел, не превосходящих 120 и взаимно простых с 40?
6. Сформулируйте теоремы Эйлера и Ферма.

Упражнения для самостоятельного решения:

Вычислите:

1) $\varphi(11)$; 2) $\varphi(15)$;

3) $\varphi(22)$; 4) $\varphi(255)$;

5) $\varphi(788)$; 6) $\varphi(1256)$;

7) $\varphi(2000)$; 8) $\varphi(9844)$;

9) $\varphi(\varphi(44))$; 10) $\varphi(\varphi(120))$;

11) $\varphi(\varphi(145))$; 12) $\varphi(\tau(95))$;

13) $\varphi(\tau(101))$;

14) $\varphi(\tau(233))$;

15) $\varphi(\tau(421))$;

16) $\varphi(\tau(621))$;

17) $\varphi(\sigma(46))$;

18) $\varphi(\sigma(152))$;

19) $\varphi(\sigma(141))$;

20) $\varphi(\sigma(321))$;

21) $\varphi(\sigma(417))$;

22) $\sigma(\varphi(\tau(242)))$;

Сколькими нулями в $g-\textit{ичной}$ системе счисления оканчивается число:

23) $\varphi(20)!, g=15$;

24) $\varphi(30)!, g=15$;

25) $\varphi(120)!, g=12$;

26) $\varphi(247)!, g=14$;

27) $\varphi(366)!, g=20$;

28) $\varphi(\sigma(17))!, g=14$;

29) $\varphi(\sigma(33))!, g=20$;

30) $\varphi(\sigma(144))!, g=8$;

31) $\varphi(\sigma(174))!, g=15$;

32) $\varphi(\sigma(233))!, g=17$;

33) $\varphi(\tau(33))!, g=12$;

34) $\varphi(\tau(54))!, g=13$;

35) $\varphi(\tau(121))!, g=7$;

36) $\varphi(\tau(347))!, g=19$;

37) $\varphi(\tau(589))!, g=15$;

38) $\varphi(\tau(155))!, g=8$;

Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем:

39) 175;

40) 190;

41) 230;

42) 456;

43) 1000;

44) 1250;

45) $\tau(142)$;

46) $\tau(200)$;

47) $\tau(355)$;

48) $\tau(528)$;

49) $\tau(1000)$;

50) $\sigma(15)$;

51) $\sigma(120)$;

52) $\sigma(242)$;

53) $\sigma(300)$;

54) $\sigma(500)$;

Вычислите:

55) $\varphi(\varphi(21)!)$;

56) $\varphi(\varphi(33)!)$;

57) $\varphi(\varphi(123)!)$;

58) $\varphi(\varphi(241)!)$;

59) $\varphi(\varphi(500)!)$;

60) $\tau(\sigma(\varphi(15)))!$;

61) $\tau(\sigma(\varphi(30)))!$;

62) $\tau(\sigma(\varphi(41)))!$;

63) $\sigma(\tau(\varphi(22)))!$;

64) $\sigma(\tau(\varphi(46)))!$;

65) $\dfrac{\varphi(\sigma(12))}{\tau(\sigma(12))}$;

66) $\dfrac{\varphi(\sigma(22))}{\tau(\sigma(61))}$;

67) $\dfrac{\varphi(\sigma(100))}{\sigma(\tau(100))}$;

68) $\dfrac{\varphi(\sigma(100))}{\sigma(\tau(100))}$;

69) $\dfrac{\varphi(145)}{\sigma(81)}$;

70) $\dfrac{\varphi(169)}{\tau(121)}$;

Запишите каноническое разложение числа:

71) $\varphi(\varphi(21)!)$;

72) $\varphi(\varphi(27)!)$;

73) $\varphi(\varphi(35)!)$;

74) $\varphi(\varphi(121)!)$;

75) $\varphi(\varphi(144)!)$;

76) $\varphi(\tau(31)!)$;

77) $\varphi(\tau(45)!)$;

78) $\varphi(\tau(81)!)$;

79) $\varphi(\tau(147)!)$;

80) $\varphi(\tau(358)!)$;

81) $\varphi(\sigma(15)!)$;

82) $\varphi(\sigma(37)!)$;

83) $\varphi(\sigma(121)!)$;

84) $\varphi(\sigma(83)!)$;

85) $\varphi(\sigma(93)!)$;

86) $\varphi(455)^{\tau(455)}$;

87) $\varphi(275)^{\tau(275)}$;

88) $\varphi(121)^{\sigma(121)}$;

89) $\varphi(200)^{\sigma(200)}$;

90) $\varphi(506)^{\sigma(506)}$;

Являются ли целыми числа:

91) $\frac{\varphi(19!)}{\tau(19!)}$;

92) $\frac{\varphi(22!)}{\tau(22!)}$;

93) $\frac{\varphi(31!)}{\tau(31!)}$;

94) $\frac{\varphi(41!)}{\tau(41!)}$;

95) $\frac{\varphi(74!)}{\tau(74!)}$;

96) $\frac{\varphi(\tau(100)!)}{\varphi(10)}$;

97) $\frac{\varphi(\tau(200)!)}{\varphi(22)}$;

98) $\frac{\varphi(\tau(255)!)}{\varphi(25)}$;

99) $\frac{\varphi(\tau(50)!)}{\varphi(10)}$;

100) $\frac{\varphi(\tau(75)!)}{\varphi(15)}$;

101) $\frac{\varphi(\tau(72)!)}{\tau(12)}$;

102) $\frac{\varphi(\tau(121)!)}{\tau(121)}$;

103) $\frac{\varphi(\tau(169)!)}{\tau(13)}$;

104) $\frac{\varphi(\tau(45)!)}{\sigma(45)}$;

105) $\frac{\varphi(\tau(144)!)}{\sigma(144)}$;

106) $\frac{\varphi(\tau(196)!)}{\sigma(14)}$;

Делится ли:

107) $\varphi(455)!\,\textit{на}\,\tau(455)!$;

108) $\varphi(200)!\,\textit{на}\,\tau(200)!$;

109) $\varphi(169)!\,\textit{на}\,\tau(169)!$;

110) $\varphi(100)!\,\textit{на}\,\tau(55)!$;

111) $\varphi(155)!\,\textit{на}\,\tau(45)!$;

112) $\varphi(100)!\,\textit{на}\,\tau(100)^{\tau(100)}$;

113) $\varphi(50)!\,\textit{на}\,\tau(50)^{\tau(50)}$;

114) $\varphi(21)!\,\textit{на}\,\tau(21)^{\tau(21)}$;

115) $\varphi(120)!\,\textit{на}\,\tau(120)^{\tau(120)}$;

116) $\varphi(300)!\,\textit{на}\,\tau(300)^{\tau(300)}$;

117) $\varphi(100)!\textit{на}\,\sigma(100)^{\tau(100)}$;

118) $\varphi(75)!\textit{на}\,\sigma(75)^{\tau(75)}$;

119) $\varphi(81)!\textit{на}\,\sigma(81)^{\tau(81)}$;

120) $\varphi(101)!\textit{на}\,\tau(50)^{\sigma(50)}$;

121) $\varphi(114)!\textit{на}\,\tau(114)^{\sigma(114)}$;

10 Конечные цепные дроби

10.1 Представление рациональных чисел конечными цепными дробями.

Пусть t - рациональное число: $t=\frac{a}{b},\quad b>0$. Число t можно представить в виде дроби особого вида. Это представление тесно связано с алгоритмом Евклида. Применим алгоритм Евклида к числам a и b; последовательно получим:

$$\begin{array}{ll}
a=bq_0+r_1, & \dfrac{a}{b}=q_0+\dfrac{r_1}{b}, \\
b=r_1q_1+r_2, & \dfrac{b}{r_1}=q_1+\dfrac{r_2}{r_1}, \\
r_1=r_2q_2+r_3, & \dfrac{r_1}{r_2}=q_2+\dfrac{r_3}{r_2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}+r_n, & \dfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=q_{n-1}+\dfrac{r_n}{r_{n-1}}, \\
r_{n-1}=r_nq_n, & \dfrac{r_{n-1}}{r_n}=q_n.
\end{array} \tag{1}$$

Из второго равенства получаем, что

$$\frac{r_1}{b}=\frac{1}{q_1+\frac{r_2}{r_1}}. \tag{2}$$

Подставляя это выражение в первое равенство (1), получим:

$$\frac{a}{b}=q_0+\frac{1}{q_1+\frac{r_2}{r_1}}. \tag{3}$$

Но из третьего равенства (1) следует, что

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{q_2 + \frac{r_3}{r_2}}.$$

Подставляя это выражение в первое равенство (1), получим

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \frac{r_3}{r_2}}}.$$

В конце концов получим:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots + \cfrac{1}{q_n}}}. \qquad (4)$$

Сокращенно дробь вида (4) будем обозначать:

$$\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n].$$

Определение 1. Представление (4) рационального числа называется конечной цепной или непрерывной дробью.

Числа $q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n$ называются ***неполными частными*** числа $\frac{a}{b}$, все q_i - целые, а начиная с q_1 - натуральные.

Если дробь $\frac{a}{b}$ положительная, то q_0 - натуральное при $a > b$ (тогда $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$) и $q_0 = 0$ при $a < b$ (в этом случае $\frac{a}{b} = [0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$).

Если дробь $\frac{a}{b}$ отрицательная, то ее можно представить в виде $-l + \frac{a_1}{b_1}$ (l, a_1, b_1 - натуральные; $\frac{a_1}{b_1}$ - правильная положительная дробь).

Тогда $\frac{a}{b} = [-l; q_1, q_2, \ldots, q_n]$, $q_0 = -l$.

Здесь целое $q_0 < 0$; $q_1, q_2, \ldots, q_n$ – натуральные.

Если $\frac{a}{b} = c$ - целое, то $c = [c]$.

Нами доказана следующая теорема:

Теорема 1. Всякое рациональное число может быть представлено в виде конечной цепной дроби.

Примеры:

1. $$\frac{155}{21}=7+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}=[7;2,1,1,1,2]$$

$$-\begin{array}{r|l}155 & 21\\ \cline{2-2} 147 & 7\\ \hline\end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l}21 & 8\\ \cline{2-2} 16 & 2\\ \hline\end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l}8 & 5\\ \cline{2-2} 5 & 1\\ \hline\end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l}5 & 3\\ \cline{2-2} 3 & 1\\ \hline\end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l}3 & 2\\ \cline{2-2} 2 & 1\\ \hline\end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l}2 & 1\\ \cline{2-2} 1 & 2\\ \hline 0 & \end{array}$$

2. $$\frac{15}{244}=0+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}=[0;16,3,1,3]$$

3. $$-\frac{524}{43}=-12-1+1-\frac{8}{43}=-13+\frac{35}{43}=-13+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}=[-13;1,4,2,1,2]$$

4. $-\dfrac{37}{582}=-1+\dfrac{545}{582}=-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}}}}=[-1;1,14,1,2,1,2,3]$

5. $\dfrac{1}{21}=0+\dfrac{1}{21}=[0;21]$

6. $7=[7]$

7. $-5=[-5]$

Если допустить, что последнее неполное частное может равняться 1, то для всякого рационального числа можно получить два представления в виде конечной цепной дроби.

Пример.

$$\frac{23}{5}=4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}=4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}$$

Теорема 2. Представление рационального числа в виде непрерывной дроби, такой, что последнее неполное отлично от 1, единственно.

Доказательство (от противного). Пусть возможны два представления числа $\dfrac{a}{b}$ в виде конечной цепной дроби:

$$\frac{a}{b}=[a_0;a_1,a_2,...,a_n]; \qquad \frac{a}{b}=[b_0;b_1,b_2,...,b_k] \tag{5}$$

Тогда $a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ldots+\cfrac{1}{a_n}}}=b_0+\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\ldots+\cfrac{1}{b_k}}}$.

Рассмотрим второе слагаемое левой части равенства, обозначив его через c:

$$c=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ldots+\cfrac{1}{a_n}}}.$$

Здесь все a_i - натуральные. Если $n>1$, то $0<c<1$.

Если $n=1$, $a_1>1$, то и в этом случае $0<c<1$. Если $n=1$ и $a_1=1$, то $c=1$. Поскольку этот случай исключается (по условию теоремы), то $0<c<1$ всегда, т.е. ***c*** – правильная дробь.

Тогда $\frac{a}{b}=a_0+c$, где $0<c<1$.

Аналогично:

$$\frac{a}{b}=b_0+l\text{, где } 0<l<1.$$

Это значит, что a_0 и b_0 - целые части одного и того же числа $\frac{a}{b}$. Но так как целая часть числа определеятеся однозначно, то $a_0=b_0$.

После вычитания a_0 и b_0 из обеих частей (5) получим равные дроби с равными числителями, но тогда и занаменатели этих дробей равны, т.е.

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\ldots+\cfrac{1}{a_n}}=b_1+\cfrac{1}{b_2+\ldots+\cfrac{1}{b_k}}.$$

Рассуждая аналогично, получим последовательно $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, ..., и т.д. Далее возможны три случая:

1) $n=k$; 2) $n<k$; 3) $n>k$.

1-й случай. $n=k$. Тогда получим: $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, ..., $a_n=b_k$. Теорема доказана.

2-й случай. $n<k$. Тогда получим

$$a_n=b_n+\cfrac{1}{b_{n+1}+\ldots+\cfrac{1}{b_k}} \qquad (6)$$

a_n - целое число. Первая часть равенства (6) может быть целым при $k=n+1$ и $b_{n+1}=1$, но это противоречит условию. Значит, случай $n<k$ невозможен.

Аналогично доказывается невозможность и случая $n>k$. Остается первый случай: $n=k$; $a_0=b_0$; $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, ..., $a_n=b_k$. Теорема доказана.

Теорема 3. Всякая конечная цепная дробь есть рациональное число.

Доказательство. Пусть дана цепная дробь (4). Если произвести указанные арифметические действия над целыми числами 1 и $q_0;q_1,q_2,\ldots,q_n$ то получим рациональное число.

10.2 Подходящие дроби и их свойства.

Определение 2. Дроби

$$\delta_0 = \frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1},\ \delta_1 = \frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1},\ \delta_2 = \frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}$$

и т.д. называется подходящими дробями цепной дроби (4) или соответствующего ей числа $\frac{a}{b}$.

Очевидно, что последняя подходящая дробь $\delta_n = \frac{P_n}{Q_n}$ есть число $\frac{a}{b}$.

Каждая подходящая дробь есть некоторое рациональное число. Поставим задачу найти общую формулу для вычисления подходящей дроби любого порядка.

Заметим, что ***s***-я подходящая дробь δ_s получается путем замены q_{s-1} на $q_{s-1} + \frac{1}{q_s}$.

Подходящие дроби последовательно можно представить в виде:

$$\delta_0 = \frac{q_0}{1} = \frac{P_0}{Q_0},\ \delta_1 = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} = \frac{P_1}{Q_1},$$

$$\delta_2 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}} = q_0 + \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1} = \frac{q_0 q_1 q_2 + q_0 + q_2}{q_1 q_2 + 1} = \frac{(q_0 q_1 + 1) q_2 + q_0}{q_1 q_2 + 1} =$$

$$= \frac{P_1 q_2 + P_0}{Q_1 q_2 + Q_0} = \frac{P_2}{Q_2}.$$

Откуда

$$\delta_2 = \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 q_2 + P_0}{Q_1 q_2 + Q_0}.$$

Предположим, что для ***s***-й подходящей дроби имеет место формула:

$$\delta_s = \frac{P_s}{Q_s} = \frac{P_{s-1} q_s + P_{s-2}}{Q_{s-1} q_s + Q_{s-2}}, \qquad (1)$$

и докажем справедливость этой формулы для подходящей дроби δ_{s+1}.

Так как δ_{s+1} получается из δ_s заменой q_s на $q_s + \frac{1}{q_{s+1}}$, то получим:

$$\delta_{s+1} = \frac{P_{s+1}}{Q_{s+1}} = \frac{P_{s-1}\left(q_s + \frac{1}{q_{s+1}}\right) + P_{s-2}}{Q_{s-1}\left(q_s + \frac{1}{q_{s+1}}\right) + Q_{s-2}} = \frac{\left(q_s P_{s-1} + P_{s-2}\right) q_{s+1} + P_{s-1}}{\left(q_s Q_{s-1} + Q_{s-2}\right) q_{s+1} + Q_{s-1}} = \frac{P_s q_{s+1} + P_{s-1}}{Q_s q_{s+1} + Q_{s-1}}.$$

На основании принципа математической индукции заключаем, что формула (1) справедлива для любого ***s***.

Выпишем рекуррентные формулы для вычисления числителей P_s и знаменателей Q_s подходящих дробей (закон составления подходящих дробей):

$P_0 = q_0$, $\quad P_1 = q_0 q_1 + 1$, а при $s > 1$, $\quad P_s = P_{s-1} q_s + P_{s-2}$,

$Q_0 = 1$, $\quad Q_1 = q_1$, $\quad Q_s = Q_{s-1} q_s + Q_{s-2}$.

Вычисления удобно проводить по схеме:

s		0	1	2	$\dots$	s	$s+1$	$\dots$	n
q_s		q_0	q_1	q_2	$\dots$	q_s	q_{s+1}	$\dots$	q_n
P_s	0	$P_0 = q_0$	$P_1 = P_0 q_1 + 1$	$P_2 = P_1 q_2 + P_0$	$\dots$	$P_s = P_{s-1} q_s + P_{s-2}$	$\dots$	$\dots$	P_n
Q_s	1	$Q_0 = 1$	$Q_1 = q_1$	$Q_2 = Q_1 q_2 + Q_0$	$\dots$	$Q_s = Q_{s-1} q_s + Q_{s-2}$	$\dots$	$\dots$	Q_n

Например, для получения P_{s+1} нужно стоящее над ним число q_{s+1} умножить на стоящее слева от клетки для P_{s+1} число P_s и к результату прибавить стоящее слева от P_s число P_{s-1}. Аналогично вычисляется Q_{s+1}.

Правильность проделанных вычислений проверятся совпадением последних вычисленных выражений для P_n и Q_n с числителем a и знаменателем b дроби $\frac{a}{b}$ (если $\frac{a}{b}$ несократима).

Пример. Разложим в непрерывную дробь число $\frac{232}{17}$ и найдем все подходящие дроби разложения.

С помощью алгоритма Евклида получаем:

$\frac{232}{17} = [13;1,1,1,5]$. Подходящие дроби находим по схеме:

s		0	1	2	3	4
q_s		13	1	1	1	5
P_s	1	13	14	27	41	232
Q_s	0	1	1	2	3	17

s		0	1	2	3	4
q_s		13	1	1	1	5
P_s	1	13	14	27	41	232
Q_s	0	1	1	2	3	17

Последовательные подходящие дроби:

$$\delta_0 = \frac{13}{1};\ \delta_1 = \frac{14}{1};\ \delta_2 = \frac{27}{2};\ \delta_3 = \frac{41}{3};\ \delta_4 = \frac{232}{17}.$$

10.3 Основные свойства подходящих дробей

1) Числители и знаменатели подходящих дробей – целые числа; знаменатели, кроме того, числа натуральные и образуют возрастающую последовательность.

Доказательство: Первое утверждение очевидно, так как q_i - целые числа.

Докажем второе. Действительно, $Q_0 = 1,\ Q_1 = q_1 \geq 1$, а при $s \geq 2$

$$Q_s = Q_{s-1}q_s + Q_{s-2}, \text{ где } q_s \geq 1,\ Q_{s-1} \geq 1,\ Q_{s-2} \geq 1. \quad (1)$$

Значит, $Q_s > Q_{s-1}$.

2) Числители и знаменатели двух соседних подходящих дробей связаны соотношением:

$$P_{s-1}Q_s - P_sQ_{s-1} = (-1)^s. \quad (2)$$

Доказательство. Используем метод математической индукции.

а) при $s = 1$ имеем:

$P_0 = q_0,\ Q_0 = 1,$

$P_1 = q_0q_1 + 1,\ Q_1 = q_1$

и $P_0Q_1 - P_1Q_0 = q_0q_1 - (q_0q_1 + 1)\cdot 1 = -1 = (-1)^1$,

т.е. при $s = 1$ соотношение (2) имеет место.

б) Предположим верность формулы (2) для $s = k$:

$P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1} = (-1)^k$

и докажем верность ее для $s = k + 1$.

$$P_kQ_{k+1} - P_{k+1}Q_k = P_k(Q_kq_{k+1} + Q_{k-1}) - Q_k(P_kq_{k+1} + P_{k-1}) = P_kQ_kq_{k+1} + P_kQ_{k-1} - Q_kP_kq_{k+1} -$$
$$- Q_kP_{k-1} = -(P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1}) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$$

Итак, $P_kQ_{k+1} - P_{k+1}Q_k = (-1)^{k+1}$.

Тогда согласно принципу математической индукции формула (2) верна для любого натурального S.

3) Подходящие дроби $\dfrac{P_s}{Q_s}$ несократимы, т.е. $(P_s, Q_s) = 1$.

Доказательство. Действительно, согласно свойству 2) подходящих дробей имеем:

$P_{s-1}Q_s - P_sQ_{s-1} = (-1)^s$.

Если допустить, что $(P_s, Q_s) \neq 1$, т.е. что $(P_s, Q_s) = d > 1$, то из равенства (1) п. 2 следует, что $(-1)^s$ делится на $d > 1$, что нвозможно. Следовательно, $(P_s, Q_s) = 1$.

Замечание. Если рациональное число $\frac{a}{b}$ разложить в цепную дробь, то поледняя подходящая дробь δ_n в этом разложении несократима и равна $\frac{a}{b}$. Таким образом, разложение в цепную дробь позволяет сокращать дроби.

4) Подходящие дроби четного порядка образуют возрастающую, а нечетного – убывающую последовательность.

Доказательство. Пользуясь формулами (1) и (2), получим:

$$\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}-\frac{P_k}{Q_k}=\frac{P_{k-2}Q_k-P_kQ_{k-2}}{Q_{k-2}Q_k}=\frac{P_{k-2}\left(Q_{k-1}q_k+Q_{k-2}\right)-\left(P_{k-1}q_k+P_{k-2}\right)Q_{k-2}}{Q_{k-2}Q_k}=$$

$$=\frac{q_k\left(P_{k-2}Q_{k-1}-P_{k-1}Q_{k-2}\right)}{Q_{k-2}Q_k}=\frac{-q_k\left(P_{k-1}Q_{k-2}-P_{k-2}Q_{k-1}\right)}{Q_{k-2}Q_k}=\frac{(-1)^{k-1}q_k}{Q_{k-2}Q_k}.$$

Итак, $\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}-\frac{P_k}{Q_k}=\frac{(-1)^{k-1}q_k}{Q_{k-2}Q_k}$.

Если k - четное, то $\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}-\frac{P_k}{Q_k}<0$, или $\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}<\frac{P_k}{Q_k}$,

т.е. подходящие дроби четного порядка образуют возрастающую последовательность.

Если k - нечетное, то $\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}-\frac{P_k}{Q_k}>0$, или $\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}>\frac{P_k}{Q_k}$,

т.е. подходящие дроби четного порядка образуют убывающую последовательность.

5) Каждая подходящая дробь $\frac{P_k}{Q_k}$ четного порядка меньше подходящих дробей $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ и $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$.

Доказательство. Используя свойство 2 подходящих дробей, находим:

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k}{Q_{k-2}Q_k}=\frac{-\left(P_{k-1}Q_k-P_kQ_{k-1}\right)}{Q_{k-2}Q_k}=\frac{-(-1)^k}{Q_{k-2}Q_k}=\frac{(-1)^{k+1}}{Q_{k-2}Q_k}.$$

Заменяя k на $k+1$, получим:

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}-\frac{P_k}{Q_k}=\frac{(-1)^{k+2}}{Q_kQ_{k+1}}.$$

Если k - четно, то $(-1)^{k+1}=-1<0$, а $(-1)^{k+2}=1>0$. Значит, при четном k

$$\frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \text{ и } \frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}.$$

Следствие. Каждая подходящая дробь $\frac{P_k}{Q_k}$ нечетного порядка больше подходящих дробей $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ и $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$.

6) Любая подходящая дробь четного порядка меньше любой подходящей дроби нечетного порядка.

Доказательство. На основании четвертого и пятого свойства при $l \geq k$ получаем:

$$\frac{P_{2l+2}}{Q_{2l+2}} < \frac{P_{2l+1}}{Q_{2l+1}} \leq \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}.$$

При $l < k$ получаем:

$$\frac{P_{2l+2}}{Q_{2l+2}} < \frac{P_{2k+2}}{Q_{2k+2}} \leq \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}.$$

Следовательно, при любых соотношениях между l и k выполняется равенство:

$$\frac{P_{2l+2}}{Q_{2l+2}} > \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}},$$

которое доказывает свойство 6.

7) Если t - положительное рациональное число, то при его разложении в цепную дробь четные подходящие дроби – приближения по недостатку, а нечетные по избытку (за исключением последней дроби, совпадающей с t).

Доказательство. Если последняя подходящая дробь, совпадающая с числом t , четного порядка, то она (по свойству 4) больше остальных подходящих дробей четного порядка, которые дают, таким образом, приближения t по недостатку. Вместе с тем число t как подходящая дробь четного порядка меньше любой подходящей дроби нечетного порядка (по свойству 6), а потому подходящие дроби нечетного порядка даят для t приближение с избытком. Аналогично рассматривается случай, когда последняя подходящая дробь, совпадающая с t , является дробью нечетного порядка (читателю рекомендуется рассмотреть этот случай самостоятельно).

8) Если t - положительное рациональное число и $\dfrac{P_k}{Q_k}$ - подходящая дробь k-го порядка в разложении t в непрерывную дробь, то

$$\left|t-\frac{P_k}{Q_k}\right|\le\frac{1}{Q_kQ_{k+1}}<\frac{1}{Q_k^2}. \qquad (3)$$

Доказательство. Так как на основании свойства 7 число t заключено между любыми двумя своими соседними подходящими дробями, то

$$\left|t-\frac{P_k}{Q_k}\right|\le\left|\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}\right|. \qquad (4)$$

Но

$$\left|\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}\right|=\left|\frac{(-1)^{k+1}}{Q_{k+1}Q_k}\right|=\frac{1}{Q_{k+1}Q_k} \qquad (5)$$

(смотрите доказательство свойства 5).

Тогда из (3) и (5) следует:

$$\left|t-\frac{P_k}{Q_k}\right|\le\frac{1}{Q_kQ_{k+1}}.$$

Так как $Q_{k+1}=Q_kq_{k+1}+Q_{k-1}$, то $Q_{k+1}>Q_k$, а потому $\dfrac{1}{Q_kQ_{k+1}}<\dfrac{1}{Q_k^2}$.

Следовательно,

$$\left|t-\frac{P_k}{Q_k}\right|\le\frac{1}{Q_kQ_{k+1}}<\frac{1}{Q_k^2}.$$

Пример 1. В предыдущем примере (см. с. 64) оцените приближение числа $t=\dfrac{232}{17}$ подходящей дробью $\delta_2=\dfrac{27}{2}$.

Решение. На основании неравенства (3) получаем:

$$\left|t-\frac{232}{17}\right|\le\frac{1}{Q_2Q_3}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}.$$

Пример 2. Заменим число $\dfrac{357}{274}$ такой подходящей дробью, чтобы полученная при этом погрешность не превышала 0,001.

Решение. Разлагаем данное число в цепную дробь:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,357 & 274 \\ \cline{2-2}
274 & 1 \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
-\,274 & 83 \\ \cline{2-2}
249 & 3 \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
-\,83 & 25 \\ \cline{2-2}
75 & 3 \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
-\,25 & 8 \\ \cline{2-2}
24 & 3 \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
-\,8 & 1 \\ \cline{2-2}
8 & 8 \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

Получим:

$$\frac{357}{274} = [1;3,3,3,8].$$

Находим подходящие дроби:

s		0	1	2	3	4
q_s		1	3	3	3	8
P_s	1	1	4	13	43	357
Q_s	0	1	3	10	33	274

$$\left|\frac{357}{274} - \frac{13}{10}\right| < \frac{1}{10 \cdot 33} > \frac{1}{1000}.$$

Следовательно, дробь δ_2 не подходит.

$$\left|\frac{357}{274} - \frac{43}{33}\right| < \frac{1}{33 \cdot 274} < \frac{1}{1000}.$$

Ответ. Искомая подходящая дробь $\delta_3 = \dfrac{43}{33}$.

Пример 3. Разложим в цепную дробь и заменим подходящей дробью с точностью до 0,001 число $\sqrt{5}$.

Решение. По теореме Лагранжа всякая квадратичная иррациональность разлагается в периодическую цепную дробь. Нахождение неполных частных $q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n$ цепной дроби $[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$ связано с процессом выделения целой части числа. Получаем:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{\alpha_1};\ \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{1} = \sqrt{5} + 2;$$

$$\alpha_1 = 4 + \frac{1}{\alpha_2};\ \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - 4} = \frac{1}{\left(\sqrt{5} + 2\right) - 4} = \sqrt{5} + 2;$$

Замечаем, что $\alpha_1 = \alpha_2$, следовательно, неполные частные, начиная с α_1, будут повторяться и $\sqrt{5} = [2;(4)]$ (число 4 в периоде). В развернутом виде полученная цепная дробь имеет вид:

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}}$$

Составим таблицу подходящих дробей:

s		0	1	2	3	...
q_s		2	4	4	4	...
P_s	1	2	9	38	123	...
Q_s	0	1	4	17	72	...

В частности, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{38}{17}$, $17 \cdot 72 > 1000$, $\sqrt{5} \approx \frac{38}{17}$.

Ответ. $\sqrt{5} = [2;(4)]$; $\sqrt{5} \approx \frac{38}{17}$.

Пример 4. Найдем действительное число α, которое обращается в цепную дробь $[2,3,2,2,1,2]$.

Решение. $[2,3,2,2,1,2]$ - конечная цепная дробь, следовательно, ее значение есть рациональное число α.

Составим таблицу подходящих дробей:

s		0	1	2	3	4	5
q_s		2	3	2	2	1	2
P_s	1	2	7	16	39	55	149
Q_s	0	1	3	7	17	24	65

Последняя подходящая дробь совпадает со значением цепной дроби.

Ответ. $\alpha = \frac{149}{65}$.

Пример 5. Найдем действительное число α, которое обращается в цепную дробь $[(1;3)]$.

Решение. $[(1;3)]$ - чисто периодическая цепная дробь:

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}.$$

Так как выражение, начинающееся с неполного частного 1, имеет тот же вид:

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\ldots}}}$$

то мы, очевидно, можем записать:

$$\alpha=[1;3,\alpha]=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\alpha}}=1+\frac{\alpha}{3\alpha+1},$$

после чего приходим к квадратичному уравнению относительно искомого α:

$$3\alpha^2-3\alpha-1=0;\ \alpha_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{6}.$$

Положительное решение и есть искомое α.

Ответ. $[(1;3)]=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{6}$.

Пример 6. Найдем действительное число α, которое обращается в цепную дробь $[5;(1,3)]$.

Решение. $[5;(1,3)]$ - смешанная периодическая цепная дробь.

$$\alpha=5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\ldots}}}}$$

т.е. $\alpha=5+\dfrac{1}{x}$, где $x=[(1;3)]$. Из предыдущей задачи $x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{6}$, следовательно,

$$\alpha=5+\cfrac{1}{\cfrac{3+\sqrt{21}}{6}}=5+\frac{6}{3+\sqrt{21}}=\frac{21+5\sqrt{21}}{3+\sqrt{21}}=\frac{7+\sqrt{21}}{2}.$$

Ответ. $\alpha=\dfrac{7+\sqrt{21}}{2}$.

Пример 7. Решим в целых числах уравнение $142x+82y=6$.

Решение. $(142,82)=2$; $6\,\vdots\,2$, следовательно, уравнение имеет решение.

Данное уравнение равносильно уравнению

$$71x+41y=3.$$

Разложим $\dfrac{71}{41}$ в цепную дробь:

$$\frac{71}{41}=[1,1,2,1,2,1,2].$$

Составим все подходящие дроби:

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{1}{1};\ \frac{P_1}{Q_1}=\frac{2}{1};\ \frac{P_2}{Q_2}=\frac{5}{3};\ \frac{P_3}{Q_3}=\frac{7}{4};\ \frac{P_4}{Q_4}=\frac{19}{11};\ \frac{P_5}{Q_5}=\frac{26}{15};\ \frac{P_6}{Q_6}=\frac{71}{41}.$$

На основании свойства подходящих дробей

$$P_{s-1}Q_s-P_sQ_{s-1}=(-1)^s$$

получим:

$$26\cdot 41-71\cdot 15=(-1)^6 \text{ или } 71\cdot(-15)+41\cdot 26=1.$$

Умножив обе части равенства на 3, находим:

$$71\cdot(-45)+41\cdot 78=3,$$

т.е. $x_0=-45$, $y_0=78$ частное решение данного уравнения.

Все решения могут быть найдены по формулам:

$$\begin{matrix} x=-45+41t \\ y=78-71t \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} x=-4+41t \\ y=7-71t \end{matrix},$$

где t принимает любые целые значения.

Пример 8. Транспортной организации, имеющей грузовые автомашины грузоподъемностью 3,5 и 4,5 т, предложено перевезти 53 т груза. Определим, сколько грузовых автомашин того и другого типа должен выделить диспетчер транспортной организации для перевозки указанного груза одним рейсом при условии полного использования грузоподъемности всех выделенных автомашин.

Решение. Пусть x – число выделяемых машин грузоподъемностью 3,5 т, y – число выделяемых машин грузоподъемностью 4,5 т. Для получения ответа нужно решить уравнение

$$3{,}5x+4{,}5y=53,$$

т.е.

$$35x+45y=530, \tag{1}$$

в целых числах с учетом того, что $x\geq 0$, $y\geq 0$.

Уравнение (1) равносильно уравнению $7x+9y=106$.

$$\frac{7}{9}=[0,1,3,2].$$

Подсчитаем подходящие дроби.

s		0	1	2	3
q_s		0	1	3	2
P_s	1	0	1	3	7
Q_s	0	1	1	4	9

По свойству подходящих дробей

$3\cdot 9-7\cdot 4=-1\Rightarrow 7\cdot 4-9\cdot 3=1\Rightarrow$
$\Rightarrow 7\cdot(4\cdot 106)+9\cdot(-3\cdot 106)=106\Rightarrow 7\cdot 424+9\cdot(-318)=106\Rightarrow$
$x_0=424$, $y_0=-318$.

Решениями уравнения будут:

$$x=424+9t$$
$$y=-318-7t,$$

где t - любое целое число.

Теперь из всех решений выберем неотрицательные:

$$\begin{cases}424+9t\geq 0\\ -318-7t\geq 0\end{cases},\quad \begin{cases}t\geq -47\dfrac{1}{9}\\ t\geq -45\dfrac{3}{7}\end{cases}.$$

Учитывая, что t - целое число, получим: $t_1=-46$, $t_2=-47$. При $t_1=-46$, $x_1=10$, $y_1=4$; при $t_2=-47$, $x_2=1$, $y_2=11$.

Ответ. Автомашины можно выделить двумя способами: 1) 10 автомашин грузоподъемностью 3,5 т и 4 автомашины грузоподъемностью 4,5 т или 2) 1 автомашину грузоподъемностью 3,5 т и 11 автомашин грузоподъемностью 4,5 т.

Контрольные вопросы:

1. Как связан алгоритм Евклида с цепными дробями?
2. Какими числами называются $q_0;q_1,q_2,\ldots,q_n$? Как они называются?
3. В каком случае разложение рационального числа в конечную цепную дробь является единственным?
4. Каким числом является конечная цепная дробь $[q_0;q_1,q_2,\ldots,q_n]$?
5. По какому закону составляются подходящие дроби? Примените его к нахождению подходящих цепных дробей цепной дроби $[2,1,2,1,3,1,5]$. Для чего в таблице для нахождения подходящих дробей к столбце перед P_0 и Q_0 ставятся числа 1 и 0?
6. Какой характерной особенностью обладают знаменатели подходящих дробей?
7. Какова связь между числителями и знаменателями двух соседних подходящих дробей?
8. Какой характерной особенностью обладают подходящие дроби с четными номерами? с нечетными номерами?
9. Может ли быть сократимой какая-либо подходящая дробь цепной дроби $[q_0;q_1,q_2,\ldots,q_n]$? Почему?

Упражнения для самостоятельного решения.

Разложите в непрерывные дроби:

1) $\frac{12}{143}$; 2) $\frac{1259}{361}$;

3) $-\frac{206}{129}$; 4) $\frac{5322}{1355}$;

5) $\frac{3725}{17514}$; 6) 5,3573;

7) 3,12587; 8) 2,119;

9) $\frac{326}{167}$; 10) $\frac{3291}{613}$;

11) $\frac{587}{639}$; 12) $\frac{425}{364}$;

13) $\frac{817}{529}$; 14) $\frac{349}{154}$;

15) $\frac{917}{613}$; 16) $\frac{268}{529}$.

Преобразуйте в обыкновенную дробь следующие непрерывные дроби:

17) $\lfloor 5,\ 1,\ 2,\ 3 \rfloor$; 18) $\lfloor 2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 1,\ 6,\ 2,\ 4 \rfloor$;

19) $\lfloor 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 1,\ 2,\ 5 \rfloor$; 20) $\lfloor -3,\ 1,\ 1,\ 5,\ 3,\ 7 \rfloor$;

21) $\lfloor 0,\ 4,\ 1,\ 1,\ 5,\ 1,\ 3 \rfloor$; 22) $\lfloor -1,\ 1,\ 1,\ 7,\ 2,\ 4 \rfloor$;

23) $\lfloor 5,\ 6,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3 \rfloor$; 24) $\lfloor 5,\ 6,\ 7,\ 4,\ 2,\ 1,\ 2 \rfloor$;

25) $\lfloor -1,\ 2,\ 5,\ 3,\ 7 \rfloor$; 26) $\lfloor 2,\ 3,\ 7,\ 10,\ 5,\ 6 \rfloor$;

27) $\lfloor 0,\ 3,\ 7,\ 6,\ 1,\ 1,\ 2 \rfloor$; 28) $\lfloor -2,\ 8,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3 \rfloor$;

29) $\lfloor 3,\ 3,\ 3,\ 1,\ 5,\ 4 \rfloor$; 30) $\lfloor -6,\ 4,\ 7,\ 1,\ 6,\ 2 \rfloor$;

31) $\lfloor 0,\ 2,\ 6,\ 7,\ 9 \rfloor$; 32) $\lfloor 5,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2 \rfloor$.

Разложите следующие числа в непрерывную дробь и найдите соответствующее приближение.

33) 0,341; 4-е приближение; 34) $\frac{587}{639}$; 3-е приближение;

35) $\frac{247}{172}$; 3-е приближение; 36) $\frac{939}{226}$; 2-е приближение;

37) $\frac{939}{226}$; 3-е приближение; 38) $\frac{1450}{789}$; 2-е приближение;

39) $\frac{24}{131}$; 2-е приближение;

40) 0,741; 3-е приближение;

41) $-\frac{128}{53}$; 3-е приближение;

42) $\frac{125}{54}$; 2-е приближение;

43) $\frac{1703}{238}$; 2-е приближение;

44) $\frac{1197}{379}$; 2-е приближение;

45) $\frac{4429}{2069}$; 2-е приближение;

46) $-\frac{629}{910}$; 2-е приближение;

47) $\frac{209}{1277}$; 1-е приближение;

48) $\frac{3582}{1141}$; 2-е приближение;

Сократите с помощью разложения в непрерывную дробь:

49) $\frac{815}{2119}$;

50) $\frac{39578}{49601}$;

51) $\frac{163053}{103395}$;

52) $\frac{47589}{66294}$;

53) $\frac{7905}{4811}$;

54) $\frac{479880}{556635}$;

55) $\frac{1363791}{2170883}$;

56) $\frac{16585}{85707}$;

57) $\frac{210246}{85249}$;

58) $\frac{29678}{67925}$;

59) $\frac{12367}{13857}$;

60) $\frac{6985}{8509}$;

61) $\frac{99889}{73831}$;

62) $\frac{10905}{16721}$;

63) $\frac{395471}{315792}$;

64) $\frac{49266}{78568}$;

Найдите ***x*** если:

65) $[3,2,5,x]=\left|\frac{121}{35}\right|$;

66) $[2,3,1,x]=\left|\frac{25}{11}\right|$;

67) $[1,1,1,x]=\left|\frac{14}{9}\right|$;

68) $[7,1,5,x]=\left|\frac{149}{19}\right|$;

69) $[-3,3,5,x]=\left|-\frac{266}{99}\right|$;

70) $[1,5,7,x]=\left|\frac{221}{185}\right|$;

71) $[-2,3,4,1,x]=\left|-\frac{76}{45}\right|$;

72) $[x,3,8,9]=\left|-\frac{383}{228}\right|$;

73) $[5,4,2,x]=\left|\frac{162}{31}\right|$;

74) $[-3,1,4,x]=\left|\frac{162}{31}\right|$;

75) $[-1,3,3,x]=\left|-\frac{37}{53}\right|$;

76) $[0,1,2,x]=\left|\frac{15}{22}\right|$;

77) $[0,3,7,x]=\left|\frac{64}{201}\right|$;

78) $[1,9,2,x]=\left|\frac{199}{180}\right|$;

79) $[7,7,7,x]=\left|\frac{2549}{357}\right|$;

80) $[-5,2,7,x]=\left|-\frac{281}{62}\right|$;

С помощью подходящих дробей найдите приближение к следующим дробям с точностью до а) 0,001; б) 0,0001.

81) $\alpha=\frac{15964}{6925}$;

82) $\alpha=\frac{23825}{17392}$;

83) $\alpha=\frac{7647}{5983}$;

84) $\alpha=\frac{5892}{7447}$;

85) $\alpha=\frac{7459}{8571}$;

86) $\alpha=\frac{9765}{7823}$;

87) $\alpha=\frac{8963}{5727}$;

88) $\alpha=\frac{5323}{7745}$;

89) $\alpha=\frac{10744}{8763}$;

90) $\alpha=\frac{13197}{7115}$;

91) $\alpha=\frac{12316}{8761}$;

92) $\alpha=\frac{9559}{16213}$;

93) $\alpha=\frac{10161}{10238}$;

94) $\alpha=\frac{19322}{9577}$;

95) $\alpha=\frac{11652}{10931}$;

96) $\alpha=\frac{7719}{14222}$;

Разложите в цепную дробь и замените подходящей дробью с точностью до 0,001 следующие числа:

97) $\sqrt{3}$;

98) $\sqrt{21}$;

99) $\sqrt{22}$;

100) $\sqrt{31}$;

101) $\sqrt{7}$;

102) $\sqrt{43}$;

103) $\sqrt{52}$;

104) $\sqrt{67}$;

105) $\sqrt{29}$;

106) $\sqrt{33}$;

107) $\sqrt{47}$;

108) $\sqrt{85}$;

109) $\sqrt{73}$;

110) $\sqrt{65}$;

111) $\sqrt{57}$;

112) $\sqrt{53}$;

113) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$;

114) $\frac{1+\sqrt{5}}{3}$;

115) $5-\sqrt{3}$;

116) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$;

Решите в целых числах следующие уравнения:

117) $15x+16y=1$;

118) $15x+25y=5$;

119) $143x+262y=1$;

120) $134x+156y=2$;

121) $13x+17y=2$;

122) $169x-182y=13$;

123) $285x+399y=57$;

124) $153x+408y=51$;

125) $344x-215y=43$;

126) $25x+35y=7$;

127) $215x+86y=43$;

128) $17x+12y=1$;

129) $25x+16y=1$;

130) $55x+25y=5$;

131) $57x-45y=3$;

132) $150x+45y=15$;

Решите задачи:

133) Для перевозки муки имеются мешки по 50 и 60 кг. Сколько нужно тех и других мешков для перевозки 480 кг муки?

134) Организация выделила 150000 тг для приобретения столов стоимостью по 4500 тг и шкафов по 5000 тг. Сколько следует купить столов и шкафов, чтобы полностью израсходовать отпущенную сумму денег?

135) Сколько билетов стоимостью 1700 и 900 тг можно купить на 8000 тг?

136) Туристическое агентство, имеющее в своем распоряжении сорокаместные и шестидесятиместные автобусы, организует экскурсионную поездку для 540 туристов. Сколько машин того и другого типа следует выделить для экскурсантов при условии, что в выделенных машинах не должно оставаться свободных мест?

137) Лыжной базе было выделено 27000 тг на закупку лыж по 3500 тг и комплекта снаряжения по 6500 тг. Сколько можно купить лыж и комплекта снаряжения на выделенную сумму денег?

138) Сколько потребуется сосудов емкостью по 0,5 и 0,7 л для разлива 10 л жидкости так, чтобы все взятые сосуды были наполнены?

139) Требуется найти 2 натуральных числа, каждое из которых не превышает 200, причем таких, что разность между ними равна 11, уменьшаемое кратно 9, а вычитаемое кратно 17.

140) Для проведения эстафеты по бегу требуется разделить дистанцию в 6,7 км на участки размером 300 м для мужчин и 175 м для женщин. Из скольких спортсменов, как мужчин, так и женщин, должны состоять команды, участвующие в эстафете?
141) На обработку каждой из деталей типов А и Б мастер затрачивает соответственно 40 и 11 мин. Сколько деталей типа А и Б обработает мастер в течение семичасового рабочего дня? Рабочее время должно быть использовано полностью.
142) При каких целых числах выражение $\frac{7-11x}{10}$ равно такому целому положительному числу, при делении которого на 4 дают в остатке 3?
143) В амбар требуется отправить 150 мешков зерна. Имеются транспортные средства грузоподъемностью 8 и 13 мешков. Сколько понадобится транспорта того и другого типа для того, чтобы перевезти мешки одним рейсом? Грузоподьемность каждого транспорта должна быть использована полностью.
144) Коробы с грузом типов А и Б весят соответственно 27 и 43 т. Сколько коробов, груженных товарами А и Б, потребуется для заполнения грузовика весом 1800 тонн.
145) Разложите число 180 на два положительных слагаемых, одно из которых кратно 13, а второе кратно 11.
146) Из имеющихся резисторов сопротивлением по 1,1 и 1,9 Ом требуется составить последовательным соединением цепь сопротивлением 65 Ом. Сколько резисторов того и другого типа потребуется?
147) Сколькими способами можно уплатить 500 тг, имея денежные купюры по 30 и 50 тг?

Приложение 1
Таблица простых чисел (до 997)

2	79	191	311	439	577	709	857
3	83	193	313	443	587	719	859
5	89	197	317	449	593	727	863
7	97	199	331	457	599	733	877
11	101	211	337	461	601	739	881
13	103	223	347	463	607	743	883
17	107	227	349	467	613	751	887
19	109	229	353	479	617	757	907
23	113	233	359	487	619	761	911
29	127	239	367	491	631	769	919
31	131	241	373	499	641	773	929
37	137	251	379	503	643	787	937
41	139	257	383	509	647	797	941
43	149	263	389	521	653	809	947
47	151	269	397	523	659	811	953
53	157	271	401	541	661	821	967
59	163	277	409	547	673	823	971
61	167	281	419	557	677	827	977
67	173	283	421	563	683	829	983
71	179	293	431	569	691	839	991
73	181	307	433	571	701	853	997

Ответы

Отношение делимости в кольце Z. Деление с остатком

12) $q=297; r=7$; 13) $q=164; r=23$; 14) $q=93; r=13$; 15) $q=80; r=18$; 16) $q=60; r=37$; 17) $q=89; r=19$; 18) $q=45; r=148$; 19) $q=29; r=54$; 20) $q=72; r=75$; 21) $q=85; r=61$; 22) $q=20; r=21$; 23) $q=82; r=10$; 24) $q=28; r=31$; 25) $q=31; r=180$; 26) $q=39; r=1$; 27) $q=40; r=71$; 28) $q=-102; r=32$; 29) $q=-84; r=1$; 30) $q=-96; r=6$; 31) $q=-52; r=19$; 32) $q=-133; r=11$; 33) $q=-62; r=10$; 34) $q=-149; r=1$; 35) $q=-178; r=23$; 36) $q=-55; r=38$; 37) $q=-60; r=78$; 38) $q=-64; r=29$; 39) $q=-66; r=80$; 40) $q=-69; r=16$; 41) $q=-109; r=21$; 42) $q=-48; r=1$; 43) $q=-80; r=23$; 44) $q=-15; r=14$; 45) $q=-34; r=7$; 46) $q=-108; r=2$; 47) $q=-74; r=43$; 48) $q=59; r=44$; 49) $q=28; r=54$; 50) $q=72; r=18$; 51) $q=48; r=7$; 52) $q=18; r=73$; 53) $q=98; r=31$; 54) $q=33; r=25$; 55) $q=18; r=248$; 56) $q=16; r=113$; 57) $q=25; r=243$; 58) $q=11; r=610$; 59) $q=29; r=101$; 60) $q=13; r=317$; 61) 6137; 62) 8382; 63) 3138; 64) 7991; 65) 6863; 66) 7020; 67) 7103; 68) 7039; 69) 5884; 70) 2478; 71) 6449; 72) 6344; 73) 5389; 74) 1724; 75) 2488; 76) 7956; 77) 6434; 78) 6173; 79) 5045; 80) 7274; 81) 6287; 82) 2645; 83) 2615; 84) 2595; 85) 2615; 86) 2431; 87) 2599; 88) 2413; 89) 2213; 90) 2261; 91) 3001; 92) 2939; 93) 7547; 94) 7319; 95) 2815; 96) 3671; 97) 5335; 98) 4409; 99) 5199; 100) 3471; 101) 19; 102) 47; 103) 29; 104) 25; 105) 24; 106) 23; 107) 23; 108) 155; 109) 37; 110) 13; 111) 19; 112) 18; 113) 29; 114) 39; 115) 39; 116) 34; 117) 25; 118) 31; 119) 31; 120) 18; 121) b=244, r=234; 122) b=292, r=290; 123) b=177, r=160; 124) b=55, r=44; 125) b=149, r=144; 126) b=99, r=89; 127) b=101, r=99; 128) b=87, r=78; 129) b=77, r=75; 130) b=69, r=68; 131) b=102, r=97; 132) b=89, r=75; 133) b=78, r=77; 134) b=83, r=80; 135) b=103, r=92; 136) b=77, r=76; 137) b=111, r=83; 138) b=64, r=61; 139) b=73, r=71; 140) b=67, r=66;

НОД. Алгоритм Евклида.

1) 36; 2) 20; 3) 5; 4) 1; 5) 117; 6) 211; 7) 103; 8) 41; 9) 2; 10) 5; 11) 19; 12) 2; 13) 1; 14) 229; 15) 513; 16) 187; 17) 442; 18) 721; 19) 127/318; 20) -587/983; 21) 233/415; 22) 11/31; 23) -4568/8723; 24) 1637/2564; 25) 6229/6784; 26) -2339/3171; 27) 7533/9511; 28) 33665/35489; 29) 1/13; 30) 1/7; 31) 17/37; 32) 2/7; 33) 213/197281; 34) -5/9; 35) 9/17; 36) -6/7; 37) 17/23; 38) 67/77; 39) Решений нет; 40) x=-21, y=14; 41) x=49, y=-42; 42) x=-8, y=2; 43) x=-18, y=-200; 44) x=-378, y=-213; 45) Решений нет; 46) x=88, y=58; 47) x=88, y=-99; 48) x=351, y=234; 49) Решений нет; 50) Решений нет; 51) x=-126, y=147; 52) x=-184, y=-69; 53) x=87, y=145; 54) Решений нет; 55) x=-1, y=1; 56) x=2, y=-1; 57) x=11, y=-6; 58) x=7, y=-6; 59) x=8, y=-6; 60) x=-1, y=-1; 61) x=3, y=-2; 62) x=3, y=-1; 63) x=2, y=3; 64) Решений нет; 65) x=1, y=-2; 66) x=5, y=-7; 67) x=-7, y=11; 68) x=1, y=-2; 69) x=4, y=5; 70) x=1, y=-3;

НОК

1) 11953/193800; 2) 9423871/551230560; 3) 3587/155400; 4) 177781/48438000; 5) 2623921/254509690; 6) 1439/148122; 7) 1473569/87363000; 8) 387/4900; 9) 521/8316; 10) 1879/99450; 11) 11697647/22782060; 12) 178403381/545819142; 13) 130154/134211; 14) 309343/106470; 15) -49447/102570; 16) 10870199/44817255; 17) x=2, y=3; 18) x=495, y=315; 19) x=3, y=7; 20) x=140, y=252; 21) x=2, y=10; 22) x=13, y=23;

Систематические числа

1) $a+b=103233_7$; $a-b=100610_7$; $a\cdot b=120223364_7$; $a:b=56_7$ (ост.213); 2) $a+b=7273_8$; $a-b=-7233_8$; $a\cdot b=165260_8$; $b:a=352$ (ост.13); 3) $a+b=44_5$; $a-b=0$; $a\cdot b=1034_5$; $a:b=1$; 4) $a+b=210_3$; $a-b=-21_3$; $a\cdot b=10122_3$; $b:a=2_3$; 5) $a+b=210331_4$; $a-b=-203113_4$; $a\cdot b=130303332_4$; $b:a=231_4$ (ост.103); 6) $a+b=32024_6$; $a-b=-31534_6$; $a\cdot b=1220023_6$; $b:a=1200_6$ (ост.1); 7) $a+b=620_7$; $a-b=-541_7$; $a\cdot b=20265_7$; $b:a=23_7$ (ост.2); 8) $a+b=10_{12}$; $a-b=32_{12}$; $a\cdot b=15(11)_{12}$; $a:b=8_{12}$ (ост.3); 9) $a+b=121_8$; $a-b=-15_8$; $a\cdot b=3076_8$; $b:a=1_8$ (ост.15); 10) $a+b=5261_9$; $a-b=5162_9$; $a\cdot b=252636_9$; $a:b=115_9$ (ост.24); 11) 281/128; 12) 569/36; 13) 4128/49; 14) 1011/100; 15) 568/125; 16) 10433/121; 17) 7971/512; 18) 4418/125; 19) 34/125; 20) 3959/2048; 21) $\left(\frac{431}{200}\right)_8$; 22) $\left(\frac{2345}{100}\right)_6$; 23) $\left(\frac{15015}{100}\right)_7$; 24) $\left(\frac{1011}{100}\right)$; 25) $\left(\frac{4233}{1000}\right)_5$; 26) $\left(\frac{7925}{100}\right)_{11}$; 27) $\left(\frac{17443}{1000}\right)_8$; 28) $\left(\frac{441}{40}\right)_8$; 29) $\left(\frac{123}{4}\right)_6$; 30) $\left(\frac{7567}{4000}\right)_8$; 32) $1{,}11_3$; 33) $2{,}11_5$; 34) $0{,}2(01235)_6$; 35) $2{,}443_6$; 36) $0{,}(52)_8$; 37) $0{,}(502)_7$; 38) $3{,}(2)_5$; 39) $0{,}(1)_8$; 40) $2{,}(624153)_8$; 41) $7{,}4(6)_9$; 42) $0{,}(23)_4$; 43) $14{,}(1)_8$; 44) $13{,}(40)_5$; 45) $0{,}(8)_9$; 46) $4{,}0(2)_7$;

Числовые функции

1) 6; 2) 9; 3) 12; 4) 12; 5) 4; 6) 6; 7) 4; 8) 4; 9) 4; 10) 18; 11) 2; 12) 2; 13) 4; 14) 2; 15) 24; 16) 2; 17) 720; 18) 2; 19) 18; 20) 12; 21) 16; 22) 728; 23) 936; 24) 5376; 25) нет; 26) да; 27) нет; 28) нет; 29) нет; 30) нет; 31) нет; 32) нет; 33) нет; 34) нет; 35) нет; 36) да; 37) нет; 38) да; 39) нет; 40) нет; 41) да; 42) да; 43) да; 44) да; 45) да; 46) да; 47) да; 48) нет; 49) да; 50) да; 51) да; 52) да; 53) да; 54) да; 55) да;

Функция $E(x)$ ($\lfloor x \rfloor$), $\{x\}$ и ее применение в теории чисел

1) 60; 2) 400; 3) 465; 4) 1688; 5) 36; 6) 69; 7) 83; 8) 90; 17) $2^{11}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$; 18) $2^{15}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17$; 19) $2^{16}\cdot 3^8\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$; 20) $2^{18}\cdot 3^8\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$; 21) $2^{19}\cdot 3^9\cdot 5^4\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13\cdot 17\cdot 19$; 22) 184756; 23) 9724; 24) 43758; 25) 4845; 26) 705432; 27) 74613; 28) 3432; 29) 13520780; 30) 134596; 31) 5200300; 32) 565722720; 33) нет; 34) да; 35) нет; 36) нет; 37) нет; 38) нет; 39) нет; 40) да; 41) нет; 42) нет; 43) нет; 44) нет; 45) нет; 46) нет; 47) нет; 48) нет;

Функция Эйлера

1) 10; 2) 8; 3) 10; 4) 128; 5) 392; 6) 624; 7) 800; 8) 4664; 9) 8; 10) 16; 11) 48; 12) 2; 13) 1; 14) 1; 15) 1; 16) 4; 17) 24; 18) 80; 19) 64; 20) 144; 21) 192; 22) 3; 23) оканчивается на 1 нуль; 24) оканчивается на 1 нуль; 25) 14 нулями; 26) 34 нулями; 27) 28 нулями; 28) не оканчивается на нуль; 29) 3 нулями; 30) 118 нулями; 31) 22 нулями; 32) 4 нулями; 33) не оканчивается на нуль; 34) не оканчивается на нуль; 35) не оканчивается на нуль; 36) не оканчивается на нуль; 37) не оканчивается на нуль; 38) не оканчивается на нуль; 39) 120; 40) 72; 41) 88; 42) 144; 43) 400; 44) 500; 45) 2; 46) 4; 47) 2; 48) 8; 49) 8; 50) 8; 51) 96; 52) 216; 53) 360; 54) 288;

Цепные дроби

1) $\lfloor 0, 11, 1, 11 \rfloor$; 2) $\lfloor 3, 2, 19, 1, 1, 4 \rfloor$; 3) $\lfloor -2, 2, 2, 12, 2 \rfloor$; 4) $\lfloor 3, 1, 12, 1, 4, 1, 3, 4 \rfloor$; 5) $\lfloor 0, 4, 1, 2, 2, 1, 5, 32, 2 \rfloor$; 6) $\lfloor 5, 2, 1, 3, 1, 31, 1, 2, 7 \rfloor$; 7) $\lfloor 3, 7, 1, 17, 11, 1, 3, 1, 11 \rfloor$; 8) $\lfloor 2, 8, 2, 2, 11, 2 \rfloor$; 9) $\lfloor 1, 1, 19, 1, 7 \rfloor$; 10) $\lfloor 5, 2, 1, 2, 2, 10, 3 \rfloor$; 11) $\lfloor 0, 1, 11, 3, 2, 7 \rfloor$; 12) $\lfloor 1, 5, 1, 29, 2 \rfloor$; 13) $\lfloor 1, 1, 1, 5, 7, 1, 5 \rfloor$; 14) $\lfloor 2, 3, 1, 3, 10 \rfloor$; 15) $\lfloor 1, 2, 60, 1, 4 \rfloor$; 16) $\lfloor 0, 1, 1, 37, 3, 2 \rfloor$; 17) $\frac{57}{10}$; 18) $\frac{30763}{13269}$; 19) $\frac{221}{318}$; 20) $-\frac{629}{256}$; 21) $\frac{50}{227}$; 22) $-\frac{67}{143}$; 23) $\frac{1507}{292}$; 24) $\frac{8018}{1553}$; 25) $-\frac{139}{256}$; 26) $\frac{16333}{7045}$; 27) $\frac{236}{741}$; 28) $-\frac{953}{507}$; 29) $\frac{1035}{313}$; 30) $-\frac{2804}{487}$; 31) $\frac{393}{850}$; 32) $\frac{195}{34}$; 33) $\frac{1}{9548}$; 34) $\frac{1}{3182}$; 35) $\frac{1}{624}$; 36) $\frac{1}{923}$; 37) $\frac{1}{11385}$; 38) $\frac{1}{222}$; 39) $\frac{1}{660}$; 40) $\frac{1}{108}$; 41) $\frac{1}{60}$; 42) $\frac{1}{304}$; 43) $\frac{1}{585}$; 44) $\frac{1}{2280}$; 45) $\frac{1}{41408}$; 46) $\frac{1}{884}$; 47) $\frac{1}{330}$; 48) $\frac{1}{1348}$; 49) $\frac{5}{13}$; 50) $\frac{154}{193}$; 51) $\frac{891}{565}$; 52) $\frac{547}{762}$; 53) $\frac{465}{283}$; 54) $\frac{31992}{37109}$; 55) $\frac{561}{893}$; 56) $\frac{155}{801}$; 57) $\frac{402}{163}$; 58) $\frac{142}{325}$; 59) $\frac{83}{93}$; 60) $\frac{55}{67}$; 61) $\frac{23}{17}$; 62) $\frac{15}{23}$; 63) $\frac{541}{432}$; 64) $\frac{153}{244}$; 65) 3; 66) 2; 67) 4; 68) 3; 69) 6; 70) 5; 71) 2; 72) -2; 73) 3; 74) 7; 75) 5; 76) 7; 77) 9; 78) 9; 79) 7; 80) 4; 81) а) $\frac{83}{36}$; б) $\frac{219}{95}$; 82) а) $\frac{37}{27}$; б) $\frac{100}{73}$; 83) а) $\frac{23}{18}$; б) $\frac{193}{151}$; 84) а) $\frac{19}{24}$; б) $\frac{72}{91}$; 85) а) $\frac{20}{23}$; б) $\frac{114}{131}$; 86) а) $\frac{176}{141}$; б) $\frac{176}{141}$; 87) а) $\frac{36}{23}$; б) $\frac{385}{246}$; 88) а) $\frac{11}{16}$; б) $\frac{189}{275}$; 89) а) $\frac{38}{31}$; б) $\frac{141}{115}$; 90) а) $\frac{102}{55}$; б) $\frac{115}{62}$; 91) а) $\frac{45}{32}$; б) $\frac{97}{69}$; 92) а) $\frac{23}{39}$; б) $\frac{79}{134}$; 93) а) $\frac{131}{132}$; б) $\frac{131}{132}$; 94) а) $\frac{115}{57}$; б) $\frac{115}{57}$; 95) а) $\frac{16}{15}$; б) $\frac{97}{91}$; 96) а) $\frac{19}{35}$;

б) $\frac{127}{234}$; 97) $\lfloor 1,\ (1,\ 2)\rfloor$, $\frac{71}{41}$; 98) $\lfloor 4,\ (1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 8)\rfloor$, $\frac{55}{12}$; 99) $\lfloor 4,\ (1,\ 2,\ 4,\ 2,\ 1,\ 8)\rfloor$, $\frac{136}{29}$; 100) $\lfloor 5,\ (1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 3,\ 1,\ 1,\ 10)\rfloor$, $\frac{206}{37}$; 101) $\lfloor 2,\ (1,\ 1,\ 1,\ 4)\rfloor$, $\frac{82}{31}$; 102) $\lfloor 6,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 5,\ (1,\ 3)\rfloor$, $\frac{341}{52}$; 103) $\lfloor 7,\ (4,\ 1,\ 2,\ 1,\ 4,\ 14)\rfloor$, $\frac{137}{39}$; 104) $\lfloor 8,\ (5,\ 2,\ 1,\ 1,\ 7,\ 1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 16)\rfloor$, $\frac{221}{27}$; 105) $\lfloor 5,\ (2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 10)\rfloor$, $\frac{70}{13}$; 106) $\lfloor 5,\ (1,\ 2,\ 1,\ 10)\rfloor$, $\frac{247}{43}$; 107) $\lfloor 6,\ (1,\ 5,\ 1,\ 12)\rfloor$, $\frac{617}{90}$; 108) $\lfloor 9,\ (4,\ 1,\ 1,\ 4,\ 18)\rfloor$, $\frac{378}{41}$; 109) $\lfloor 8,\ (1,\ 1,\ 5,\ 5,\ 1,\ 1,\ 16)\rfloor$, $\frac{487}{57}$; 110) $\lfloor 8,\ (16)\rfloor$, $\frac{129}{16}$; 111) $\lfloor 7,\ (1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 14)\rfloor$, $\frac{141}{20}$; 112) $\lfloor 7,\ (3,\ 1,\ 1,\ 3,\ 14)\rfloor$, $\frac{182}{25}$; 113) $\lfloor (1,\ 2)\rfloor$, $\frac{41}{30}$; 114) $\lfloor 1,\ (12,\ 1,\ 1)\rfloor$, $\frac{27}{25}$; 115) $\lfloor 3,\ 3,\ (1,\ 2)\rfloor$, $\frac{134}{41}$; 116) $\lfloor 2,\ (4,\ 1)\rfloor$, $\frac{64}{29}$; 117) $x=-1+16t$, $y=1-15t$; 118) $x=2+5t$, $y=-1-3t$; 119) $x=11+262t$, $y=-6-143t$; 120) $x=7+78t$, $y=-6-67t$; 121) Нет решений; 122) $x=-1-14t$, $y=-1-13t$; 123) $x=3+7t$, $y=-2-5t$; 124) $x=3+8t$, $y=-2-5t$; 125) $x=2-5t$, $y=3-8t$; 126) Нет решений; 127) $x=1+2t$, $y=-2-5t$; 128) $x=5+12t$, $y=-7-17t$; 129) $x=-7+16t$, $y=11-25t$; 130) $x=1+5t$, $y=-2-11t$; 131) $x=4-15t$, $y=5-19t$; 132) $x=1+3t$, $y=-3-10t$; 133) Два решения: а) $x=0, y=8$; б) $x=6, y=3$; 134) Четыре решения: а) $x=0, y=30$; б) $x=10, y=21$; в) $x=20, y=12$; г) $x=30, y=3$; 135) $x=1, y=7$; 136) Пять решений: а) $x=0, y=9$; б) $x=3, y=7$; в) $x=6, y=5$; г) $x=9, y=3$; д) $x=12, y=1$; 137) $x=4, y=2$; 138) Три решения: а) $x=20, y=0$; б) $x=13, y=5$; в) $x=6, y=10$; 139) Два решения: а) $x=198, y=187$; б) $x=45, y=34$; 140) Три решения: а) $x=6, y=28$; б) $x=13, y=16$; в) $x=20, y=4$; 141) $x=5, y=20$; 142) $x=-253+40t, y=69-11t$ или $x=-13+40t, y=3-11t$; 143) $x=9, y=6$; 144) $x=38, y=18$; 145) Два решения: а) $x=2, y=14$; б) $x=13, y=1$; 146) Три решения: а) $x=9, y=29$; б) $x=28, y=18$; в) $x=47, y=7$; 147) Четыре решения: а) $x=0, y=10$; б) $x=5, y=7$; в) $x=10, y=4$; г) $x=15, y=1$.

Список использованных источников

1 Казачек Н.А., Перлатов Г.Н., Виленкин Н.Я., Бородин А.И. Алгебра и теория чисел. Под редакцией Н.Я.Виленкина - Москва: Просвещение, 1984. - 192 с.

2 Деза Е.И., Котова Л.В. Сборник задач по теории чисел (112 задач с подробными решениями): Учебное пособие. - М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. - 224 с.

3 Кочева А.А. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть 3. 1984. – 42 с.

4 Кудреватов Г.А. Сборник задач по теории чисел. М: Просвещение, 1970. – 128с.

5 Александров В.А., Горшенин С.М. Задачник-практикум по теории чисел. М: Просвещение, 1972. – 80 с.

6 Азовская Т.В. Задачи по теории чисел: учебное пособие / Т.В. Азовская, В.В. Севостьянова. Самара: Издательство «Самарский университет», 2009. – 72 с.

7 Воробьев, Н.Н. Теория чисел: Делимость в кольце целых чисел: методические рекомендации / Н.Н. Воробьев, С.Н. Воробьев, М.И. Наумик. – Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2017 – 55 стр.

8 Сикорская, Г.А. Алгебра и теория чисел. Индивидуальная домашняя контрольная работа №2: методические указания / Г.А. Сикорская. Оренбургский гос. ун-т. Оренбург: ОГУ, 2017. – 27 с.

9 Ситников, В.М. Теория чисел: учебное пособие / В.М. Ситников. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. пед. ун-та, 2014. – 116 с.

10 Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. – М: МЦНМО, 2002. – 264 с.