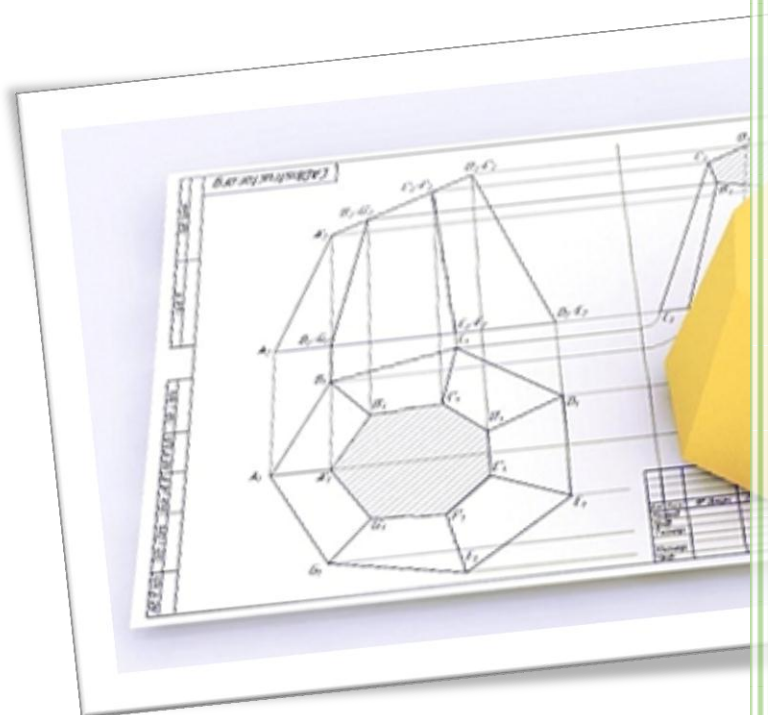


Епифанова С.В.

# Начертательная геометрия



Костанай 2023



Министерство образования и науки Республики Казахстан  
Костанайский региональный университет им. А.Байтурсынова  
Кафедра машиностроения

С.В. Елифанова

# **Начертательная геометрия**

Учебно-методическое пособие

Костанай, 2023

**УДК 514.182**  
**ББК 22.151.3я73**

**Е67**

**Составители:**

Епифанова Светлана Викторовна, старший преподаватель кафедры машиностроения инженерно-технического института имени А. Айтмухамбетова КРУ имени А. Байтурсынова.

**Рецензенты:**

Моисеенко Олег Викторович – к.т.н., доцент кафедры транспорта и сервиса, Костанайский инженерно-экономический университет имени М.Дулатова.

Салыков Булат Рахимжанович – к.т.н., заведующий кафедрой машин, тракторов и автомобилей, инженерно-технического института имени А. Айтмухамбетова КРУ им. А. Байтурсынова;

Жаналинов Базарбай Нургалиевич – к.т.н., доцент кафедры машиностроения, инженерно-технического института имени А. Айтмухамбетова КРУ им. А. Байтурсынова.

Епифанова С. В.

**Е67** Начертательная геометрия. Учебно-методическое пособие. - Костанай: КРУ им. А. Байтурсынова, 2023.- 75 с.

ISBN 978-601-356-291-9

Учебно-методическое пособие предусматривает изучение основ начертательной геометрии, развитие пространственного мышления и методов изображения объектов на чертеже.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов ВУЗа, изучающих дисциплины «Начертательная геометрия», «Начертательная геометрия и инженерная графика».

**ББК 22.151.3я73**

**Е67**

Утверждено и рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом Костанайского регионального университета имени А. Байтурсынова, \_\_. \_\_.2022 г. протокол №\_\_

ISBN 978-601-356-291-9

© Костанайский региональный университет им.А.Байтурсынова

## Содержание

Введение.....	4
Тема 1. Комплексный чертеж точки.....	5
Тема 2. Комплексный чертеж прямой.....	8
Тема 3. Определение натуральной величины отрезка.....	14
Тема 4. Комплексный чертеж плоскости .....	17
Тема 5. Пересечение прямой с плоскостью.....	22
Тема 6. Пересечение плоскостей.....	25
Тема 7. Поверхности.....	28
Тема 8. Пересечение многогранника плоскостью .....	31
Тема 9. Пересечение поверхности вращения плоскостью построение разверток геометрических тел.....	33
Тема 10. Взаимное пересечение поверхностей (вращения).....	36
Тема 11. Взаимное пересечение поверхностей (многогранники).....	54
Тема 12. Взаимное пересечение поверхностей (многогранник и поверхность вращения).....	63
Заключение .....	72
Приложение А. Принятые обозначения и знаки геометрических операций.....	74

## ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия является наукой, исследующей пространственные формы объектов с помощью их плоских графических изображений, а также обосновывает методы и способы построения изображений геометрических тел и их элементов.

Цель изучения курса:

- освоение методов изображения геометрических фигур на плоскости;
- изучение свойств геометрических образов (точка, прямая, плоскость, поверхность);
- обучение построению сложных чертежей точек, прямых, плоскостей и наиболее распространенных инженерных поверхностей с использованием метода ортогонального проецирования;
- приобретение навыков решения позиционных и метрических задач с разными геометрическими образами;
- развитие умения мысленно представлять геометрические образы и их расположение в пространстве на основе сложных чертежей.

Рекомендуемый порядок изучения разделов курса "Начертательная геометрия":

1. Ознакомление с условиями задания и инструкциями по выполнению.
2. Изучение соответствующего материала по теме и ответ на вопросы для самопроверки.
3. Изучение правил выполнения графических работ.
4. Выполнение чертежа в соответствии с предложенным алгоритмом.

Чертежи выполняются на листах формата А3 или А4 с рамкой и основной надписью. Индивидуальные задания выбираются в соответствии с порядковым номером в журнале системы "Платонус". Чертежи выполняются в заданном масштабе, компоновка должна быть равномерной в пределах формата листа и занимать не менее 75% рабочей площади листа. Линии проводятся карандашом с использованием чертежных инструментов, толщина и размеры линий соответствуют ГОСТ 2.303-68[7]. Все надписи на чертежах должны быть выполнены шрифтом в соответствии с ГОСТ 2.304-81[8].

Учебно-методическое пособие содержит лаконичное и компактное изложение теоретического материала, который поясняется решением типовых задач. Вопросы в конце глав позволяют систематизировать и повторить основные идеи и понятия разделов. Объем и структура пособия соответствуют количеству учебных часов, выделенных на изучение данной дисциплины в учебном плане.

## ТЕМА 1. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ ТОЧКИ

**Цель:** Формирование понятия комплексного чертежа, основных правил ортогонального проецирования точек.

Теоретический материал по теме «Комплексный чертёж точки» представлен по ссылке:



Теоретический материал[1]



Видеоурок[4]

**Задание 1:** На формате А4 построить комплексные чертежи точек А, В, С (таблица 1) и определить октант, в котором расположена каждая точка.

### Алгоритм выполнения:

1. Построить систему координат.
2. Построить по координатам, заданным в таблице 1: на оси X-  $X_A$  широту точки, на оси Y -  $Y_A$  глубину и на оси Z-  $Z_A$  высоту.
3. На пересечении линий связи отметить проекции точки:  $A_1$  – горизонтальную проекцию,  $A_2$  – фронтальную и  $A_3$  – профильную.
4. Линии связи на чертеже должны быть сплошные тонкие. Нанести обозначения проекций точки. Пример выполнения задания на рисунке 1.

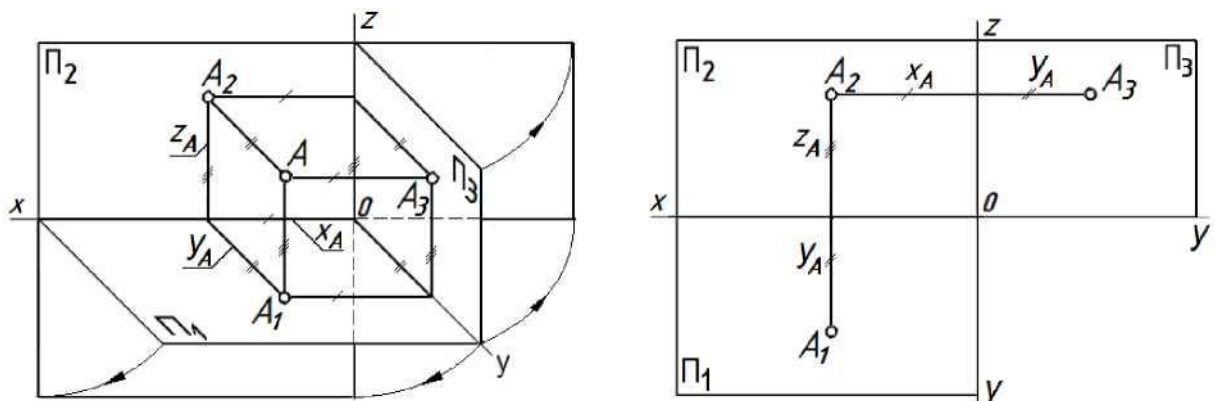


Рисунок 1 - Трёхкартинный комплексный чертёж точки

Таблица 1 - Исходные данные для выполнения комплексного чертежа точек

Вариант	А	В	С
1	20; -65; -30	40; -15; 65	80; 30; -35
2	75; 75; 5	60; -20; 60	20; 10; -40
3	0; -30; 75	-60; 20; 40	20; -25; 15
4	90; -5; 70	65; 60; 15	15; -15; 20
5	30; 0; -10	70; -15; 15	15; -55; -16
6	20; -25; 0	60; -5; 80	90; -75; 40
7	0; -60; 20	20; -10; -60	85; -10; 20
8	10; -20; 15	55; -70; 5	80; 20; -45
9	0; 50; 10	60; 70; -70	80; -10; 10
10	85; 70; 10	25; -20; 25	90; 10; -60
11	25; 5; 25	60; 60; -5	95; -20; 50
12	95; 30; 65	15; -15; 10	70; 80; -50
13	20; 5; 60	50; 60; -5	90; -15; -30
14	10; 5; 70	80; -20; 25	40; 65; -10
15	20; 45; 55	60; 70; -10	90; -10; 60
16	5; 10; 60	40; -65; -10	70; 5; -40
17	10; 45; 5	90; 5; -10	50; -70; 70
18	65; 20; 70	0; -20; -15	50; 70; -5
19	20; 20; 70	50; 50; -10	70; -10; 30
20	85; 10; 45	70; -50; 0	20; 20; -10
21	0; 70; 60	30; 10; -80	70; -15; 20
22	0; 70; 25	45; -10; 70	90; 30; -20
23	10; 20; 40	50; 60; -10	75; -10; -40
24	10; 10; 10	90; -80; 20	65; 10; -60
25	60; 65; 10	0; 10; -25	85; -5; 60

**Задание 2: Построить комплексные чертежи точек А, В, С, D, E, F (таблица 2). Выполняется задание на одном комплексном чертеже (все точки на одной системе координат).**

**Алгоритм выполнения:**

1. Построить систему координат.
2. Построить по координатам, заданным в таблице 2: на оси X- X<sub>A</sub> широту точки, на оси Y - Y<sub>A</sub> глубину и на оси Z- Z<sub>A</sub> высоту и т.д.
3. На пересечении линий связи отметить проекции точки: A<sub>1</sub> – горизонтальную проекцию, A<sub>2</sub> – фронтальную и A<sub>3</sub> – профильную и т.д.
4. Линии связи на чертеже должны быть сплошные тонкие. Нанести обозначения проекций точки.



Таблица 2 - Исходные данные для выполнения комплексного чертежа точек

Вариант	A	B	C	D	E	F
1	10; 20; 15	55; 70; 5	80; 20; 45	20; 60;55	100,35;20	60; 10;5
2	0; 50; 10	60; 70; 70	80; 10; 10	20; 10;70	90; 50; 60	60; 85;0
3	85; 70; 10	25; 20; 25	90; 10; 60	15; 70;65	105;10;45	70; 0; 0
4	25; 5; 25	60; 60; 5	95; 20; 50	36;45; 55	105; 45; 60	70; 0; 0
5	95,30;65	15; 15; 15	70; 80;5	35; 70; 70	15; 80; 55	85; 20; 0
6	20; 5; 60	50; 60; 5	90; 15;30	60; 60; 60	100; 5; 10	25; 10; 0
7	10; 5; 70	80; 20; 25	40; 65; 10	70; 70;70	0; 35; 60	30; 5; 0
8	20; 45; 55	60; 70; 10	90; 10;60	20;0; 10	95; 20; 10	75;60;75
9	5; 10; 60	40; 65; 10	70; 5; 40	70; 50; 75	0; 70; 45	15; 0;5
10	10; 45; 5	90;5; 10	50;70;70	15; 5;50	95; 15; 65	60; 70; 0
11	65; 20; 70	0; 20; 15	50; 70; 5	15; 60; 55	90; 60;40	60;5;5
12	20; 20; 70	50; 50; 50	70;10;30	80; 60; 70	5; 40; 60	25; 0; 10
13	85; 10; 45	70; 50; 0	20; 20; 10	55; 60;60	0; 0; 60	75; 0; 0
14	0; 70; 60	30; 10; 80	70;15;20	60; 50;70	0; 0; 50	15; 70; 5
15	0; 70; 25	45; 10; 70	90; 30; 20	65; 60; 70	90; 10; 15	15; 0; 15
16	10; 20; 40	50; 60;10	75; 10; 40	75; 60; 75	5; 70;55	35; 0;0
17	10; 10; 10	90; 80; 20	65; 10;60	15; 70; 65	100; 70; 40	80; 10; 0
18	60; 65; 10	0; 10;25	85; 5; 60	20;65;60	105; 35;35	55; 0;0
19	10; 70; 20	50; 10; 60	90; 25: 10	70; 65; 45	5; 35; 55	25; 0: 50
20	10; 5; 70	40; 70; 10	90; 5; 40	100; 55; 25	25; 65; 80	50; 0; 0
21	0; 50; 5	25; 0; 60	85; 10; 15	50; 50; 50	90; 0; 55	20; 0; 0
22	10; 70; 10	40; 10; 50	80; 20; 20	80; 55; 55	10; 50; 70	20; 0; 0
23	75; 70; 20	10;35; 10	60; 20; 60	20; 70; 70	100; 60; 50	75; 5; 0
24	15; 35; 70	70; 75; 80	35; 0; 0	20; 65; 30	40; 15; 65	80; 30; 35
25	30; 55; 50	90; 50; 35	60; 5; 10	75; 75; 5	60; 20;60	20; 10; 10

**Задание 3. Определить расположение каждой заданной точки в системе координат A(45;80;15); B(0;30;20); C(34;75;0); D(0;0;70); L(75;25;15); E(15;0;25); F(30;0;0); M(40;0;28); N(0;24;0); P(0;40;0). Заполнить таблицу 3**

Таблица 3 – Расположение в системе координат

Произвольно в пространстве расположена точка	
Горизонтальной плоскости проекций принадлежит точка	
Фронтальной плоскости проекций принадлежит точка	
Профильной плоскости проекций принадлежит точка	
На оси X расположена точка	
На оси Y расположена точка	
На оси Z расположена точка	

### Контрольные вопросы

1. Дать определение понятия комплексного чертежа (эпюра).
2. Что называется проекцией точки?
3. В каких случаях проекция точки на эпюре может располагаться на оси OX?
4. Как образуется эпюр в системе трех плоскостей проекций?
5. Как определить, положение третьей проекции точки, если известны две ее другие проекции?
6. Как называется координата, определяющая расстояние от точки пространства до фронтальной плоскости проекций?

## ТЕМА 2. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ПРЯМОЙ

**Цель:** Формирование понятия комплексного чертежа прямой, основных правил ортогонального проецирования прямых и их положения в пространстве.

Теоретический материал по теме «Комплексный чертеж прямой» находится по ссылке



### Алгоритм выполнения:

1. Познакомиться с таблицей 4, изучить положения прямых в пространстве и их свойства.
2. Ознакомиться с условием задачи.
3. Записать условие задачи в тетрадь, выполнить задание согласно требуемым условиям и правилам оформления чертежа.

Таблица 4 – Свойства прямых и положения их в пространстве

<b>Прямая общего положения</b>		
Прямая общего положения		Располагается произвольно в пространстве.
<b>Прямые уровня</b>		
Горизонтальная прямая уровня		$ab // AB$ ; $(a'b') // (Ox)$ ; $(a''b'') // (Oy_w)$ ; $(AB \wedge V) = (ab \wedge Ox) = \beta$ ; $(AB \wedge W) = (ab \wedge Oy_H) = \gamma$ .
Фронтальная прямая уровня		$c'd' // CD$ ; $(cd) // (Ox)$ ; $(CD \wedge H) = (c'd' \wedge Ox) = \alpha$ $(CD \wedge W) = (c''d'' \wedge Oz) = \gamma$

Продолжение таблицы 4

<p>Профильная прямая уровня</p>		<p><math>/e''f''/ = (EF)</math>  <math>(ef) = (Oy_H)</math>  <math>(e'f') = (Oz)</math>  <math>(EF \wedge H) = (e''f'' \wedge Oy_W) = \alpha</math>  <math>(EF \wedge V) = (e'f' \wedge Oz) = \beta</math></p>
<p><b>Проецирующие прямые</b></p>		
<p>Горизонтально- проецирующая прямая</p>		<p><math>(AB) \perp H</math>;  <math>(AB) // V</math>;  <math>(AB) // W</math>;  <math>ab</math> - точка;  <math>/a'b' / = /a''b'' / = /AB /</math>;  <math>(a'b') \perp (Ox)</math>;  <math>(a''b'') \perp (Oy_W)</math>.</p>
<p>Фронтально- проецирующая прямая</p>		<p><math>(CD) \perp V</math>;  <math>(CD) // H</math>;  <math>(CD) // W</math>;  <math>c'd'</math> - точка;  <math>/cd / = /c''d'' / = /CD /</math>;  <math>(cd) \perp (Ox)</math>;  <math>(c''d'') \perp (Oz)</math>.</p>
<p>Профильно- проецирующая прямая</p>		<p><math>(EF) \perp W</math>;  <math>(EF) // H</math>;  <math>(EF) // V</math>;  <math>e''f''</math> - точка;  <math>/ef / = /e'f' / = /EF /</math>;  <math>(ef) \perp (Oy_H)</math>;  <math>(e'f') \perp (Oz)</math>.</p>

Задание 4. Используя таблицу 3, определить расположение прямых: а и в, п и т, с и d, р и q, t и l (рисунок 2 и рисунок 3) относительно друг друга и расположение этих прямых в пространстве.

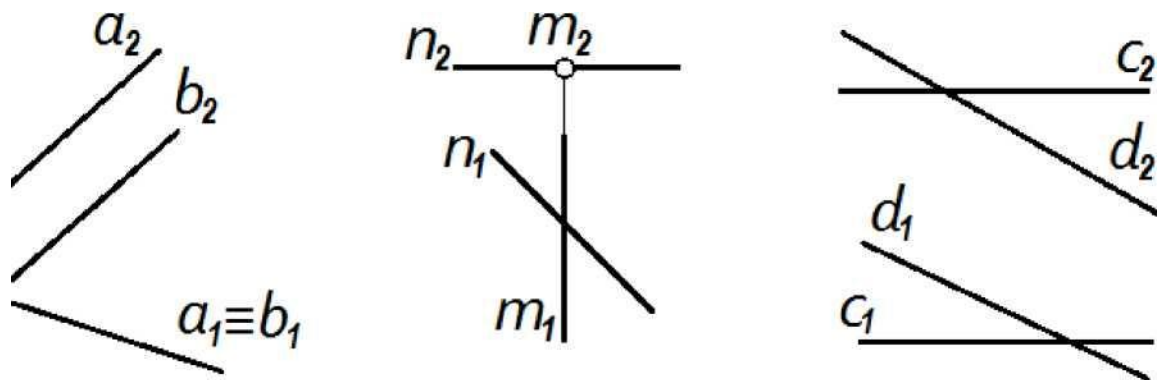


Рисунок 2 - Прямые в пространстве

$a \parallel b$

$n \dots m$

$c \dots d$

$a$  – прямая общего положения

$n$  -

$c$  -

$b$  - прямая общего положения

$m$  -

$d$  -

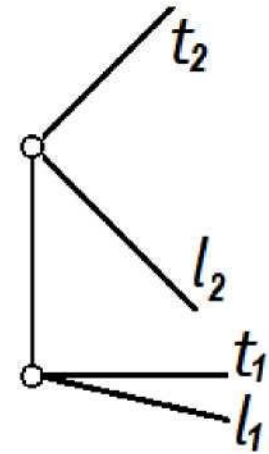
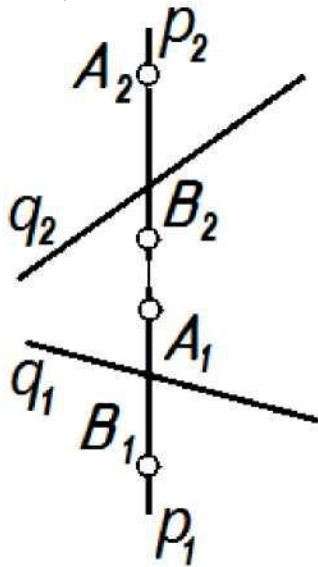


Рисунок 3 - Прямые в пространстве

$p \quad q$

$t \quad l$

$p$  -

$t$  -

$q$  -

$l$  -

**Задание 5.** Используя свойства прямых, представленные в таблице 4, определить недостающую горизонтальную проекцию отрезка  $A_1B_1$ , его длину и угол  $\beta$ , если угол  $\alpha = 60^\circ$  (рисунок 4).

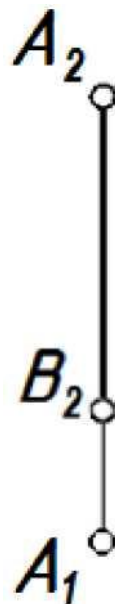


Рисунок 4 - Отрезок АВ

Задание 6. Используя свойства прямых, представленные в таблице 4, определить натуральную величину и углы наклона ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) к плоскостям проекции H, V и W отрезков ломаной линии (рисунок 5). Заполнить таблицу 5.

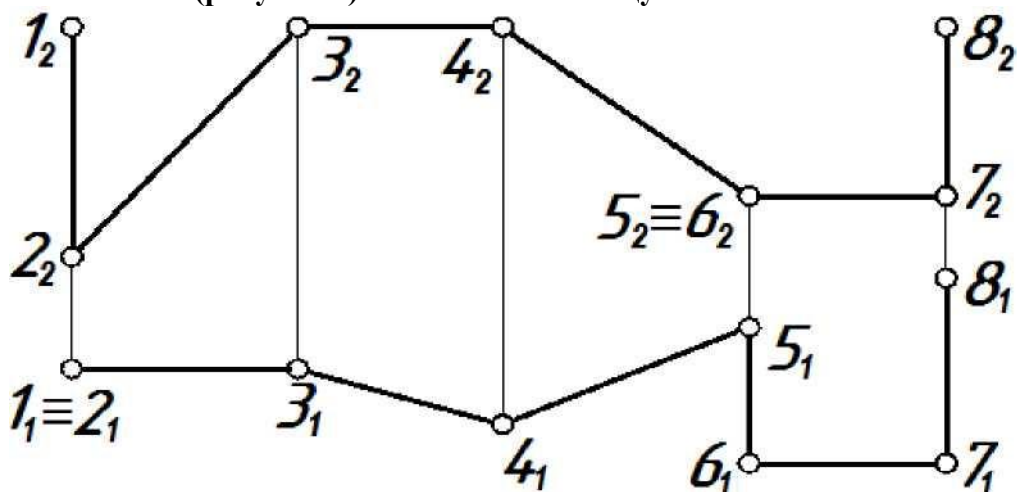


Рисунок 5 - Прямые в пространстве

Таблица 5 – Свойства отрезков

Отрезок прямой	Название прямой	Положение прямой относительно H, V, W	Углы		
			$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1-2					
2-3					
3-4					
4-5					
5-6					
6-7					
7-8					

Задание 7. Постройте следы прямой, заданной отрезком CB (рисунок 6), и определите октанты, через которые она проходит.

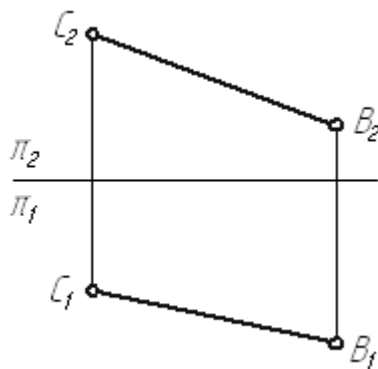


Рисунок 6 - Отрезок CB

Задание 8: Построить две проекции ломаной линии ABCDEFKLM, отрезки которой занимают следующее положение: AB – профильное, BC – общее, CD – фронтальное, DE – горизонтально-проецирующее, EF – горизонтальное, FK – фронтально-проецирующее, KL – общее, LM – профильно-проецирующее. Отрезки произвольной длины.

Задание 9. Определить видимость конкурирующих точек скрещивающихся прямых (рисунок 7).

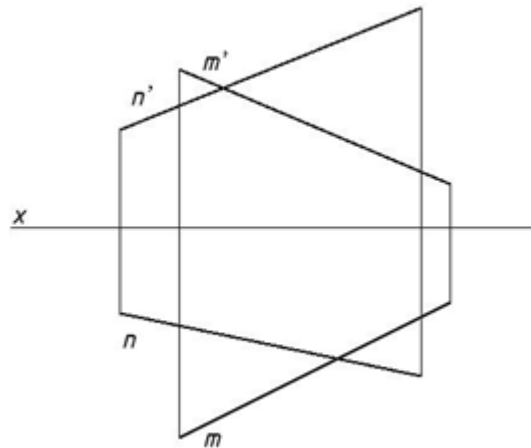


Рисунок 7 - Прямые в пространстве

Задание 10. Построить следы прямой AB, координаты точек A(45,30,60) B(20,45,10).

Задание 11. По рисунку 8 определить взаимное положение прямых и точек в пространстве. Заполнить таблицу 6

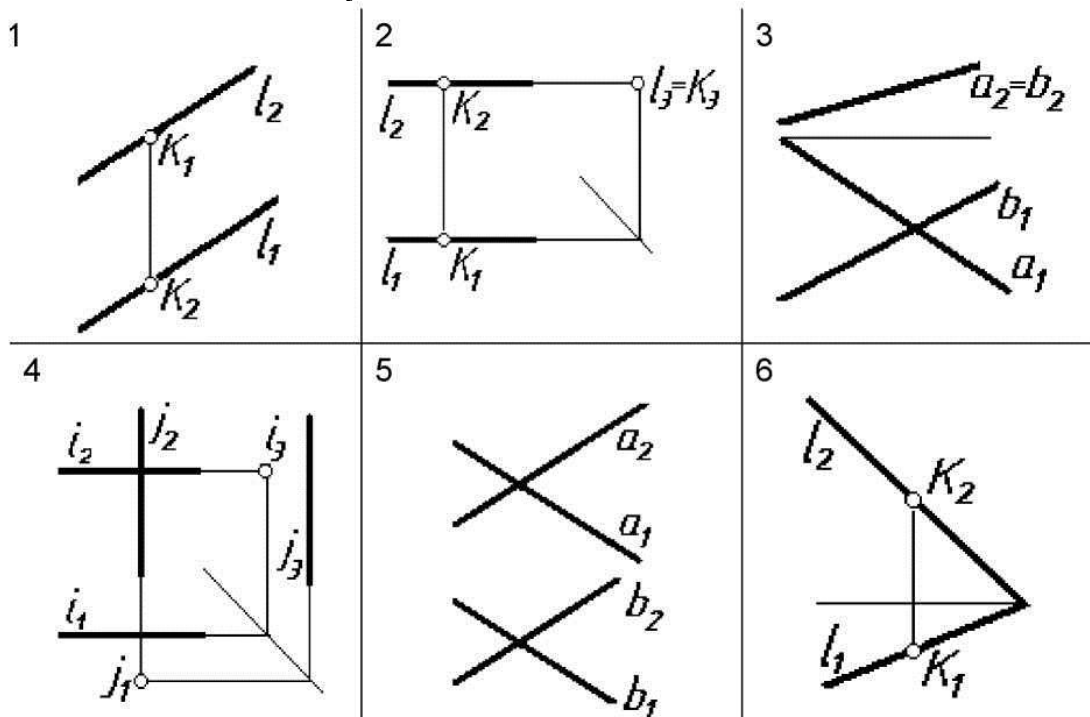


Рисунок 8 - Прямые в пространстве

Таблица 6 – Положение в пространстве

Точка $K$ принадлежит профильно-проецирующей прямой на чертеже	
Точка $K$ принадлежит прямой общего положения на чертеже	
Точка $K$ не принадлежит прямой $l$ на чертеже	
Параллельные прямые изображены на чертеже	
Пересекающиеся прямые изображены на чертеже	
Скрещивающиеся прямые изображены на чертеже	

### Контрольные вопросы

1. Как можно задать прямую на чертеже?
2. Как располагаются проекции отрезка прямой общего положения?
3. Какие положения относительно плоскостей проекций может занимать прямая линия и как называются прямые в каждом возможном случае?
4. Как по комплексному чертежу определить принадлежность точки прямой линии?
5. Какое взаимное положение могут занимать две прямые линии?
6. Какие характерные признаки на чертеже имеют параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые?

### ТЕМА 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТРЕЗКА

**Цель:** Формирование навыка определения натуральной величины отрезка различными способами: метод прямоугольного треугольника, метод вращения, метод замены плоскостей, метод плоскопараллельного перемещения.

Теоретический материал по теме «Определение натуральной величины отрезка» находится по ссылке



#### Алгоритм выполнения:

1. Познакомиться с таблицей 4, изучить положения прямых в пространстве и их свойства.
2. Ознакомиться с условием задачи.
3. Записать условие задачи в тетрадь, выполнить задание согласно требуемым условиям и правилам оформления чертежа.

**Задание 12.** Определить расстояние от точки  $D$  до отрезка  $AB$  (рисунок 9).

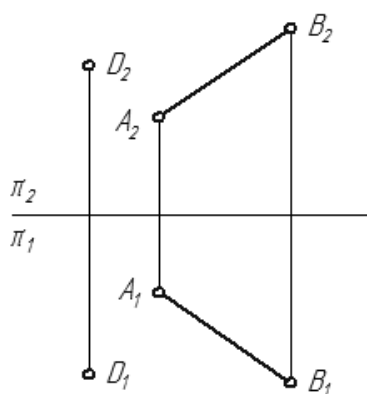


Рисунок 9 – Комплексный чертеж точки и отрезка

**Задание 13.** Определить расстояние между параллельными прямыми (рисунок 10).

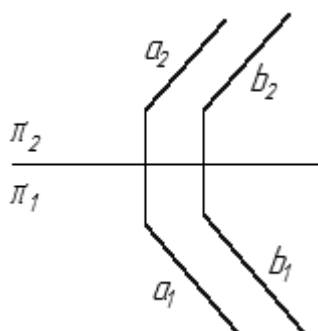


Рисунок 10 – Параллельные прямые



**Задание 14.** Определить расстояние между скрещивающимися прямыми, заданными отрезками  $AB$  и  $CD$  (рисунок 11).

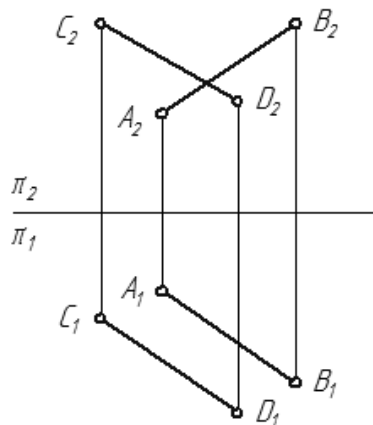


Рисунок 11 – Скрещивающиеся прямые

**Задание 15.** Отложить на прямой  $l$  от точки  $A$  отрезок  $AB$ , равный 60 мм (рисунок 12).

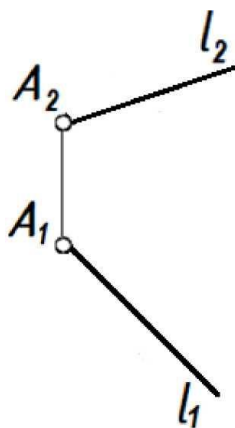


Рисунок 12 – Комплексный чертеж прямой

**Задание 16.** Определить натуральную величину расстояния от точки  $A$  до прямой  $CD$  (рисунок 13).

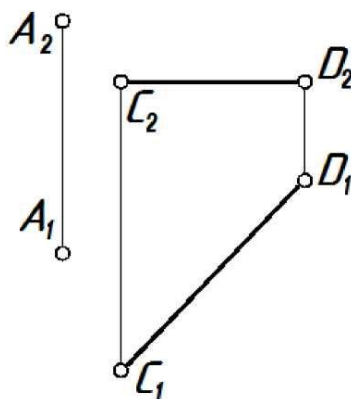


Рисунок 13 – Комплексный чертеж точки и отрезка

### **Контрольные вопросы**

1. Каким способом можно определить на чертеже натуральную величину отрезка прямой общего положения и углы ее наклона к плоскостям проекций?
2. Как найти натуральную величину отрезка параллельного горизонтальной плоскости проекций?
3. Как найти натуральную величину отрезка перпендикулярного одной из плоскостей проекции?
4. В чем заключается метод вращения?
5. В чем заключается метод плоскопараллельного перемещения?

## Тема 4: КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ ПЛОСКОСТИ

**Цель:** Формирование понятия комплексного чертежа плоскости, основных правил ортогонального проецирования плоскостей и их положения в пространстве.

Теоретический материал по теме «Комплексный чертёж плоскости» находится по ссылке



### Алгоритм выполнения:

1. Познакомиться с таблицей 7, изучить положения прямых в пространстве и их свойства.
2. Ознакомиться с условием задачи.
3. Записать условие задания в тетрадь, выполнить задание согласно требуемым условиям и правилам оформления чертежа.

Таблица 7 – Плоскости и их свойства.

<b>Плоскость общего положения</b>		
Плоскость общего положения		Располагается произвольно в пространстве
<b>Проецирующие плоскости</b>		
Горизонтально-проецирующая плоскость		$\triangle ABC \perp H$ Углы $\gamma$ и $\beta$ проецируются в натуральную величину
Фронтально-проецирующая плоскость		$ABCD \perp V$ Углы $\gamma$ и $\alpha$ проецируются в натуральную величину

Продолжение таблицы 7

Профильно-проецирующая плоскость		$\triangle ABC \perp W$ Углы $\alpha$ и $\beta$ проецируются в натуральную величину
<b>Плоскости уровня</b>		
Горизонтальная плоскость уровня		$\triangle ABC \parallel H$ $\triangle ABC$ проецируется в натуральную величину на H
Фронтальная плоскость уровня		$ABCD \parallel V$ $ABCD$ проецируется в натуральную величину на V
Профильная плоскость уровня		$\triangle ABC \parallel W$ $\triangle ABC$ проецируется в натуральную величину на W

**Задание 17. Найти фронтальные проекции точек  $E_2, D_2$  пятиугольника (ABCDE) (рисунок 14).**

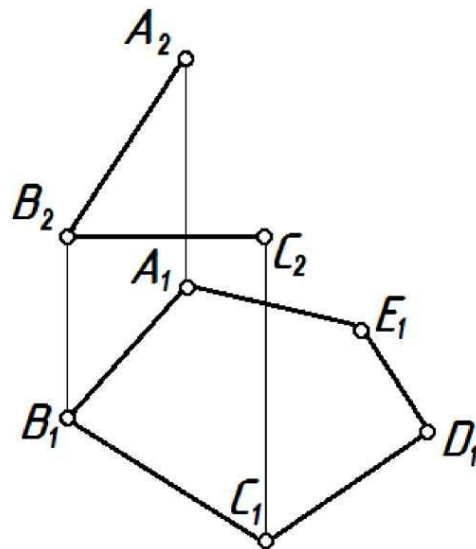


Рисунок 14 – Комплексный чертеж пятиугольника

**Задание 18.** Определить натуральную величину расстояния от точки А до плоскости  $\Sigma(DEF)$  (рисунок 15).

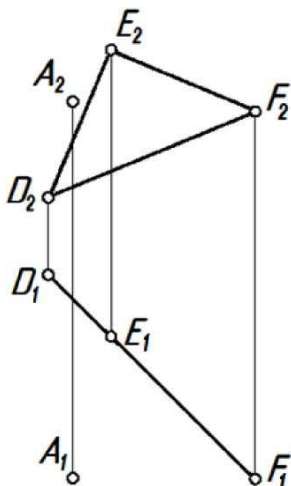


Рисунок 15 – Комплексный чертеж точки и плоскости

**Задание 19.** Провести главные линии плоскости, если плоскость задана  $\Delta ABC$  (рисунок 16).

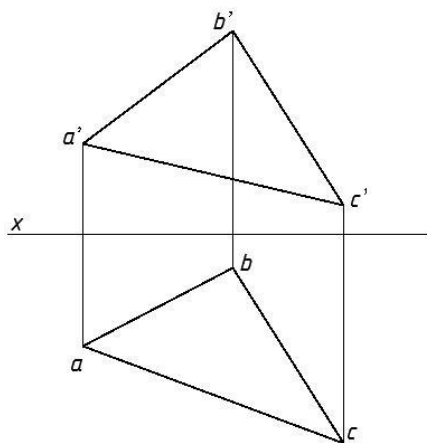


Рисунок 16 – Комплексный чертеж плоскости

**Задание 20.** Определить угол наклона плоскости  $\Omega(ABC)$  к плоскости проекции Н (рисунок 17).

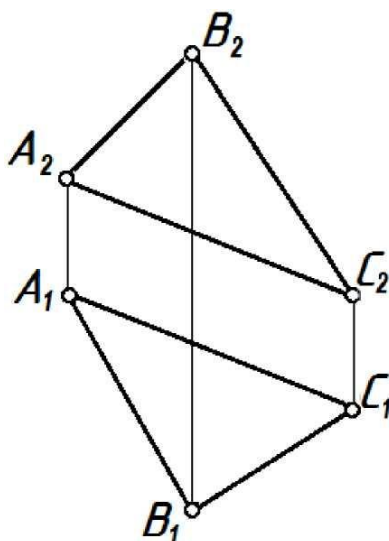


Рисунок 17 – Комплексный чертеж плоскости

**Задание 21. Построить недостающие проекции (горизонтальную и фронтальную) прямоугольника ABCD (рисунок 18).**

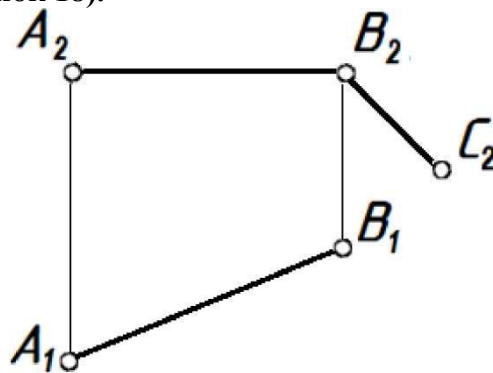


Рисунок 18 – Комплексный чертеж точки и отрезка

**Задание 22. Построить недостающую проекцию точки D при условии, что точка D находится на расстоянии 35мм от плоскости  $\Delta ABC$ . (рисунок 19).**

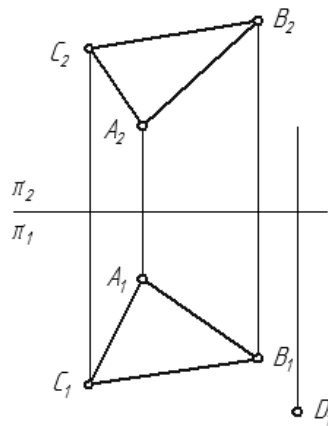


Рисунок 19 – Комплексный чертеж точки и плоскости

**Задание 23. По рисунку 20 определить положение каждой плоскости в пространстве. Заполнить таблицу 8**

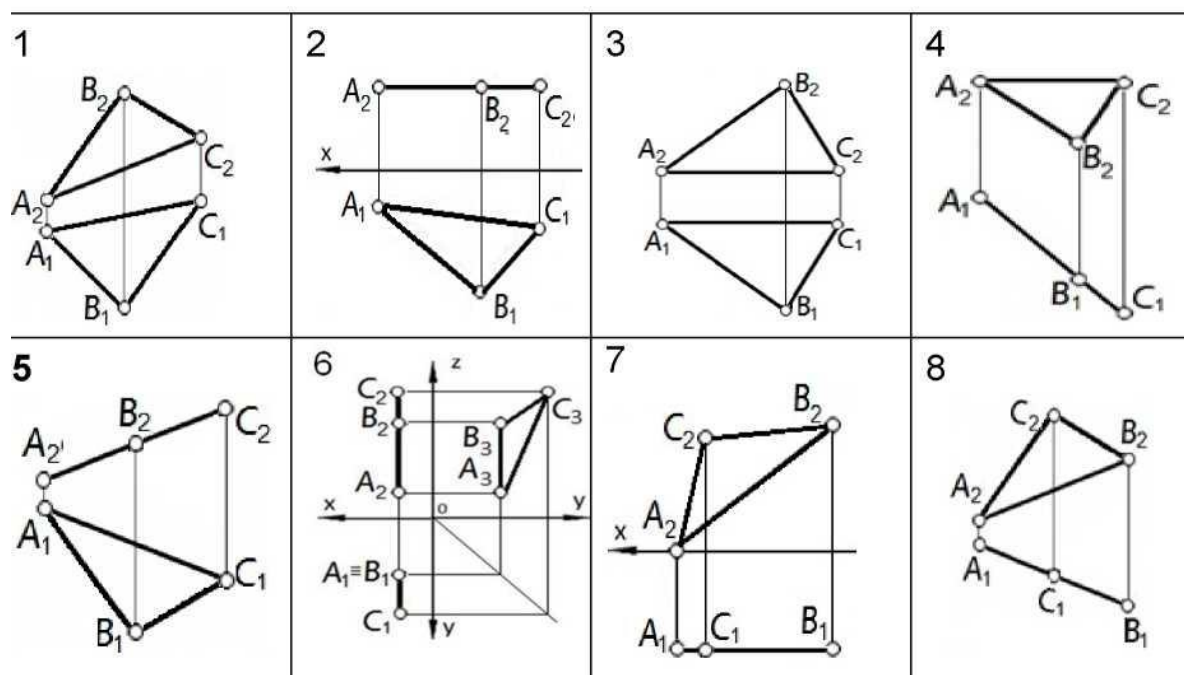


Рисунок 20 – Плоскости в пространстве

Таблица 8 – Положение в пространстве

Горизонтальная плоскость уровня изображена под номером	
Фронтальная плоскость уровня изображена под номером	
Профильная плоскость уровня изображена под номером	
Горизонтально-проецирующая плоскость изображена под номером	
Фронтально-проецирующая плоскость изображена под номером	
Профильно-проецирующая плоскость изображена под номером	
Плоскость общего положения изображена под номером	

### Контрольные вопросы

1. Какими способами задается плоскость на чертеже?
2. Какие положения может занимать плоскость относительно плоскостей проекций?
3. Какие плоскости относятся к плоскостям общего положения?
4. Какие плоскости относятся к плоскостям частного положения?
5. Какие характерные признаки имеют на чертеже плоскости общего положения, плоскости проецирующие и плоскости уровня?
6. Перечислить название плоскостей, перпендикулярных плоскостям проекций и параллельных плоскостям проекций, указать их свойства.
7. Как по комплексному чертежу плоскости общего положения определить углы наклона ее к плоскостям проекций?

## ТЕМА 5. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ

**Цель:** Формирование навыка построения точки пересечения прямой линии с плоскостью. Закрепления понятия конкурирующих точек и определение видимости объекта. Формирование пространственного мышления.

Теоретический материал по темам «Взаимное положение прямой и плоскости» и «Конкурирующие точки» находится по ссылке



Теоретический материал[1]



Видеоурок

**Задание 24.** Построить по координатам треугольник общего положения  $ABC$  и отрезок  $EF$  прямой. Найти проекции точки пересечения прямой с плоскостью треугольника и определить видимость участков прямой в предположении, что треугольник непрозрачный.

**Алгоритм выполнения (рисунок 21 б):**

1. Ознакомиться с условием задачи в таблице 9. На формате А4 построить две проекции  $\Delta ABC$  и прямой  $EF$
2. Заключить прямую  $EF$  во вспомогательную плоскость, в качестве которой можно использовать горизонтально-проецирующей плоскостью  $\alpha$ ; Если  $\alpha \perp \pi_1$ , то на плоскость проекций  $\pi_1$  плоскость  $\alpha$  проецируется в прямую (горизонтальный след плоскости  $\alpha\pi_1$  или  $\alpha_1$ ), совпадающую с  $E_1F_1$  (рисунок 21 а);
3. Найти прямую пересечения 1-2 проецирующей плоскости  $\alpha$  с плоскостью  $ABC$ .  
Прямая 1-2 и заданная прямая  $EF$  лежат в одной плоскости  $\alpha$  и пересекаются в точке  $K$ .
4. Видимость определяется по конкурирующим точкам, например точки 2 и 5. Их горизонтальные проекции совпадают  $2_1 \equiv 5_1$ , а фронтальные нет –  $5_2 \in E_2F_2$ , а  $2_2 \in A_2B_2$ . Стрелка указывает направление взгляда. Та точка, которая встречается первой, т.е. у которой значение по оси  $Z$  больше, будет видимой. Первой мы видим  $2_2$ , значит прямая до точки  $K$  будет невидимой, а после точки  $K$  видимой. Аналогично видимость определяется по конкурирующим точкам 3 и 4.



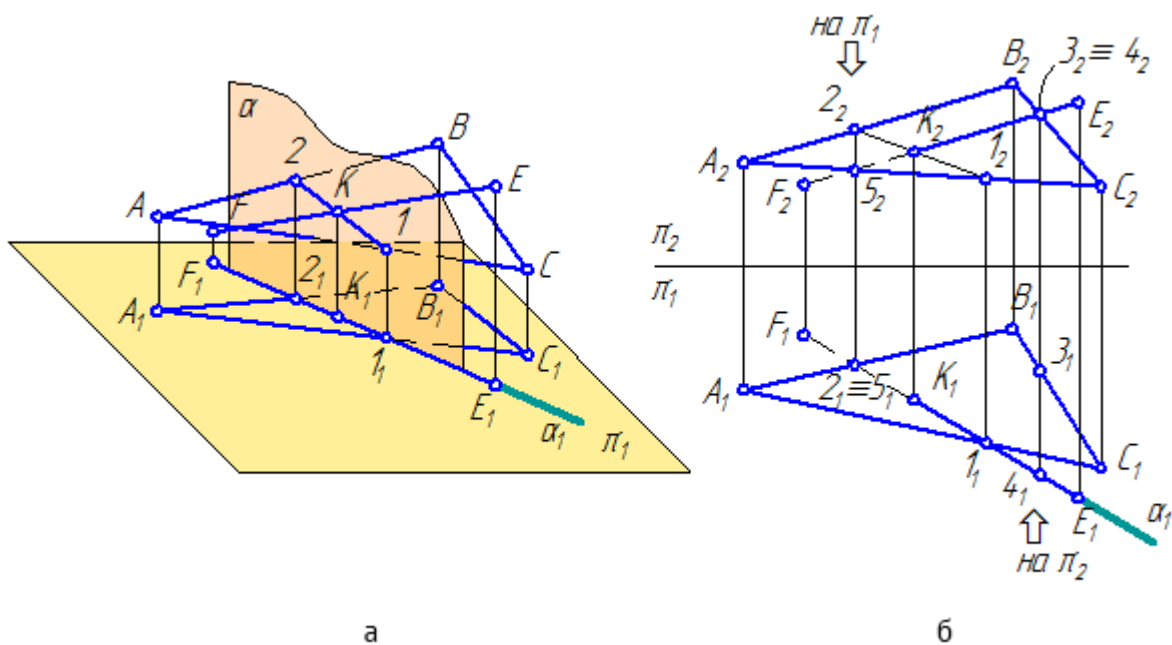


Рисунок 21 – Пересечение прямой с плоскостью. а- вид в пространстве, б-комплексный чертёж

Таблица 9 -Исходные данные

Вариант	Прямая				Треугольник																	
	Точка	X	Y	Z																		
1	F	15	0	50																		
	E	160	100	50																		
2	F	160	15	100																		
	E	15	50	0																		
3	F	15	15	110																		
	E	160	70	20																		
4	F	160	20	70		<table border="1"> <thead> <tr> <th>Точка</th> <th>x</th> <th>y</th> <th>z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>5</td> <td>80</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>100</td> <td>0</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>160</td> <td>80</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	Точка	x	y	z	A	5	80	100	B	100	0	100	C	160	80	0
	Точка	x	y	z																		
A	5	80	100																			
B	100	0	100																			
C	160	80	0																			
4	E	15	60	70																		
	F	30	40	60																		
5	E	160	40	60																		
	F	160	0	100																		
6	E	30	70	10																		
	F	30	25	40																		
7	E	160	80	40																		
	F	160	30	0																		
8	E	30	30	70	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Точка</th> <th>x</th> <th>y</th> <th>z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>100</td> <td>10</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>15</td> <td>0</td> <td>110</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>150</td> <td>110</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table>		Точка	x	y	z	A	100	10	0	B	15	0	110	C	150	110	40
	Точка	x	y	z																		
A	100	10	0																			
B	15	0	110																			
C	150	110	40																			
9	F	145	50	60																		
	E	20	50	60																		
10	F	145	0	40																		
	E	20	95	40																		
11	F	20	40	100																		

	E	145	40	30	Точка	x	y	z
	E	145	0	10	A	10	0	80
					B	140	50	80
					C	100	90	0
13	F	5	5	40				
	E	140	90	40				
14	F	5	30	0				
	E	140	30	40				
15	F	140	80	80				
	E	5	15	10				
16	F	140	40	60	Точка	x	y	z
	E	5	40	60	A	130	20	0
					B	70	90	10
					C	15	20	100
17	F	5	5	40				
	E	140	90	40				
18	F	5	30	0				
	E	140	30	40				
19	F	140	80	80				
	E	5	15	10				
20	F	140	40	60				
	E	5	40	60				
21	F	5	5	40	Точка	x	y	z
	E	140	90	40	A	130	20	0
					B	70	90	10
					C	15	20	100

### Контрольные вопросы

1. Что такое конкурирующие точки?
2. Как в пространстве могут располагаться прямая и плоскость?
3. Что такое главные линии плоскости?
4. Как определяется видимость прямой при пересечении ее с плоскостью?
5. Что такое горизонтально-конкурирующие точки?

## ТЕМА 6. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

**Цель:** Закрепить знания по нахождению линии пересечения плоскостей, способов преобразования чертежа и нахождения натуральной величины плоскости

Теоретический материал по темам «Взаимное положение плоскостей» и «Конкурирующие точки» находятся по ссылкам



Теоретический материал



Видеоурок

**Задание 25.** Построить линию пересечения треугольников  $ABC$  и  $EDK$  и показать видимость их в проекциях. Определить натуральную величину треугольника  $ABC$  (рисунок 22).

### Алгоритм выполнения.

В левой половине листа формата А3 (297x420 мм) намечаются оси координат и из таблицы 10 согласно своему варианту берутся координаты точек  $A, B, C, D, E, K$  вершин треугольника. Стороны треугольников и другие вспомогательные прямые проводятся вначале тонкими сплошными линиями.

Линии пересечения треугольников строятся по точкам пересечения сторон одного треугольника с другим или по точкам пересечения каждой из сторон одного треугольника с другим. Такую линию можно построить, используя и вспомогательные секущие проецирующие плоскости.

Видимость сторон треугольника определяется способом конкурирующих точек. Видимые отрезки сторон треугольников выделяют сплошными жирными линиями, невидимые следует показать штриховыми линиями.

Определяется натуральная величина треугольника  $ABC$ . Плоскопараллельным перемещением треугольник  $ABC$  приводится в положение проецирующей плоскости и далее вращением вокруг проецирующей прямой в положение, когда он будет параллелен плоскости проекций (построение выполнить в правой части формата).

В треугольнике  $ABC$  следует показать и линию  $MN$  пересечения его с треугольником  $EDK$ .

Выполнив все построения в карандаше, чертеж обводят жирной линией (обводят линии заданных треугольников и линию пересечения треугольников). Все вспомогательные построения должны быть показаны на чертеже в виде тонких линий.

Таблица 10. Исходные данные

№	X <sub>A</sub>	Y <sub>A</sub>	Z <sub>A</sub>	X <sub>B</sub>	Y <sub>B</sub>	Z <sub>B</sub>	X <sub>C</sub>	Y <sub>C</sub>	Z <sub>C</sub>	X <sub>D</sub>	Y <sub>D</sub>	Z <sub>D</sub>	X <sub>E</sub>	Y <sub>E</sub>	Z <sub>E</sub>	X <sub>K</sub>	Y <sub>K</sub>	Z <sub>K</sub>
1	117	90	9	52	25	79	0	83	48	68	110	85	135	19	36	14	52	0
2	120	90	10	50	25	80	0	85	50	70	110	85	135	20	35	15	50	0
3	115	90	10	52	25	80	0	80	45	64	105	80	130	18	35	12	50	0
4	120	92	10	50	20	75	0	80	46	70	115	85	135	20	32	10	50	0
5	117	9	90	52	79	25	0	48	83	68	85	110	135	36	19	14	0	52
6	115	7	85	50	80	25	0	50	85	70	85	110	135	20	20	15	0	50
7	120	10	90	48	82	20	0	52	82	65	80	110	130	38	20	15	0	52
8	116	8	88	50	78	25	0	46	80	70	85	108	135	36	20	15	0	52
9	115	10	92	50	80	25	0	50	85	70	85	110	135	35	20	15	0	50
10	18	10	90	83	79	25	135	48	82	67	85	110	0	36	19	121	0	52
11	20	65	30	40	15	65	80	30	35	15	35	70	70	75	80	35	0	0
12	75	75	5	60	20	60	20	10	40	30	55	50	90	50	35	60	5	10
13	0	30	75	30	65	15	80	25	15	45	65	75	95	40	0	10	0	10
14	90	5	70	65	60	15	15	15	20	25	15	70	95	60	35	65	10	0
15	30	0	10	70	15	15	15	55	16	70	55	60	5	30	60	20	0	0
16	20	25	0	60	5	80	90	75	40	0	60	60	75	80	70	90	10	0
17	0	60	20	20	10	60	85	10	20	50	70	65	75	35	0	10	0	5
18	10	20	15	55	70	5	80	20	45	20	60	55	100	35	20	60	10	5
19	0	50	10	60	70	70	80	10	10	20	10	70	90	50	60	60	85	0
20	85	70	10	25	20	25	90	10	60	15	70	65	105	10	45	70	0	0
21	25	5	25	60	60	5	95	20	50	36	45	55	105	45	60	70	0	0
22	95	30	65	15	15	10	70	80	5	35	70	70	115	80	55	85	20	0
23	20	5	60	50	60	5	90	15	30	60	60	60	100	5	10	25	10	0
24	10	5	70	80	20	25	40	65	10	70	70	70	0	35	60	30	5	0
25	20	45	55	60	70	10	90	10	60	20	0	10	95	20	10	75	60	75

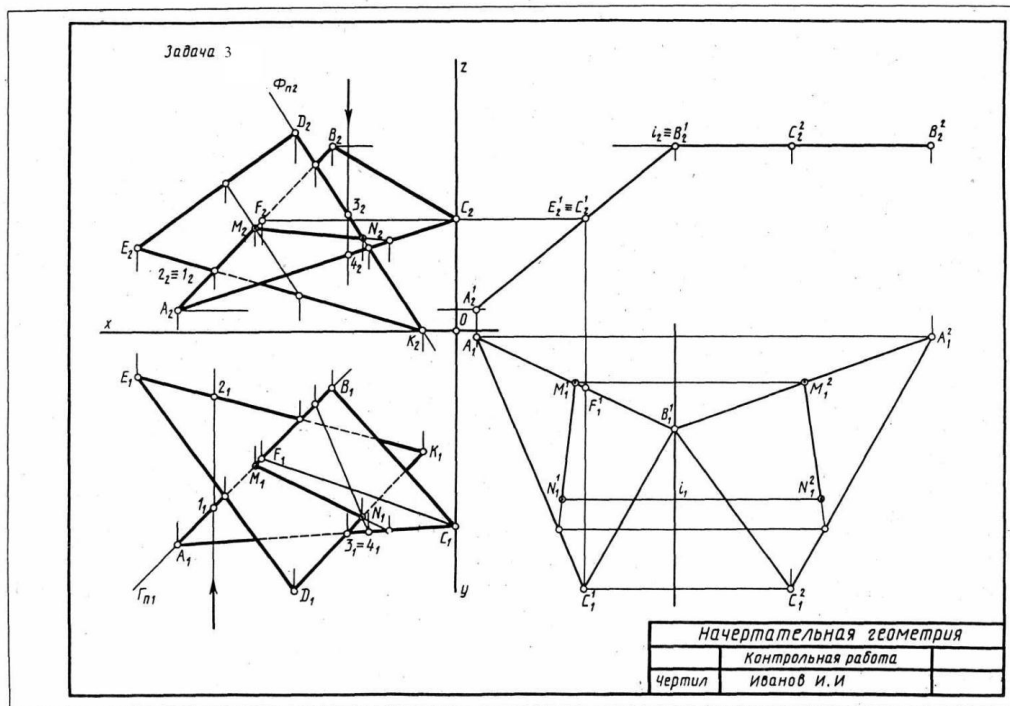


Рисунок 22 - Пример выполнения задания «Пересечение плоскостей»

### **Контрольные вопросы:**

1. Что такое конкурирующие точки?
2. Какие способы нахождения натуральной величины плоскости вы знаете?
3. Что такое плоскость?
4. Какое положение в пространстве может занимать плоскость?
5. Как определяется видимость участков плоскости?
6. Как можно задать плоскость на чертеже?

## ТЕМА 7. ПОВЕРХНОСТИ.

**Цель:** Закрепить основные знания о поверхностях и способах нахождения точек на поверхности.

Теоретический материал по теме «Поверхности» находится по ссылке



### Алгоритм выполнения:

1. Ознакомиться с условием заданий.
2. Записать условие задания в тетрадь, выполнить задание согласно требуемым условиям и правилам оформления чертежа.

**Задание 26.** Установить принадлежат ли точки А, В, С, D, Е поверхностям (рисунок 23).

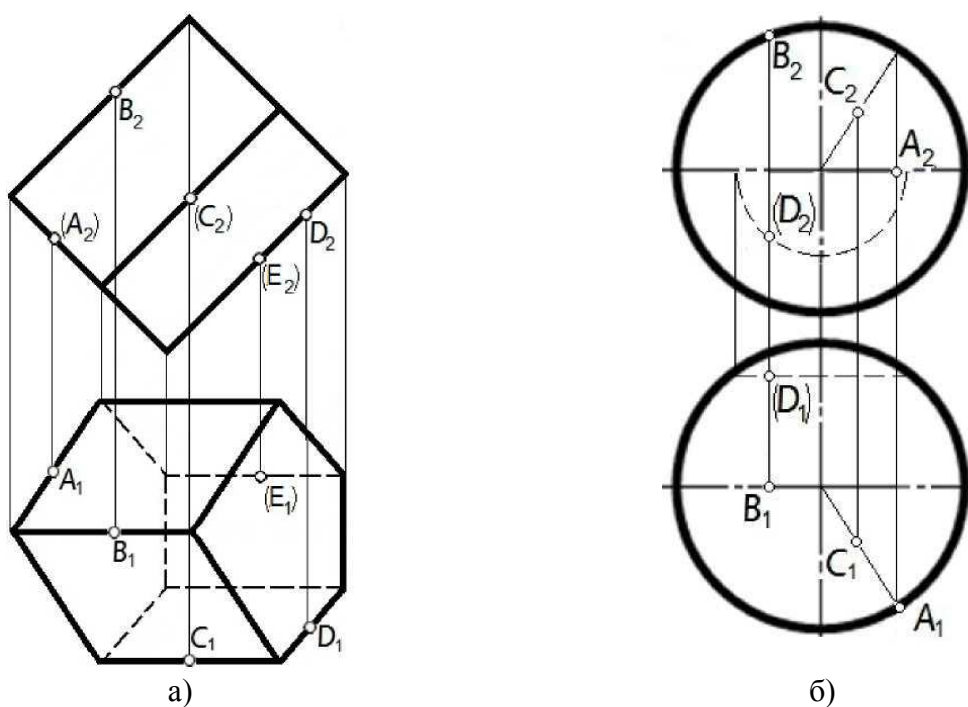


Рисунок 23 – Поверхности (а-призма, б-сфера)

**Задание 2** По заданным горизонтальной и фронтальной проекциям построить профильную проекцию поверхностей. В системе трех плоскостей проекций на каждой поверхности построить точки: А - на крайней левой образующей поверхности; В - на передней правой части поверхности; С - на задней левой части поверхности (рисунок 24).

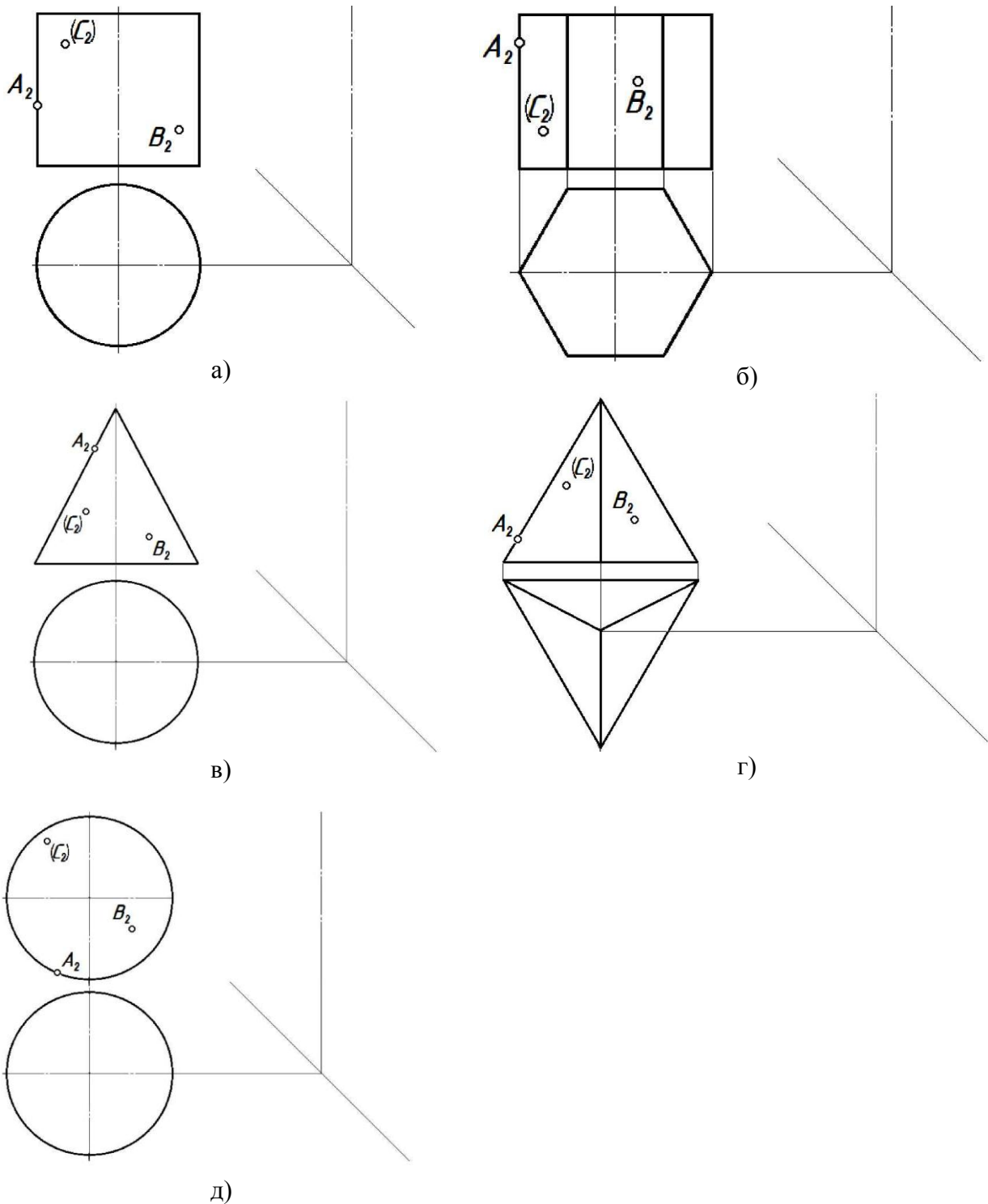


Рисунок 24 – Поверхности (а-цилиндр, б-призма, в-конус, г-пирамида, д-сфера)

**Задание 27. Построить недостающие проекции точек К, L, М, N на поверхности тора (рисунок 25).**

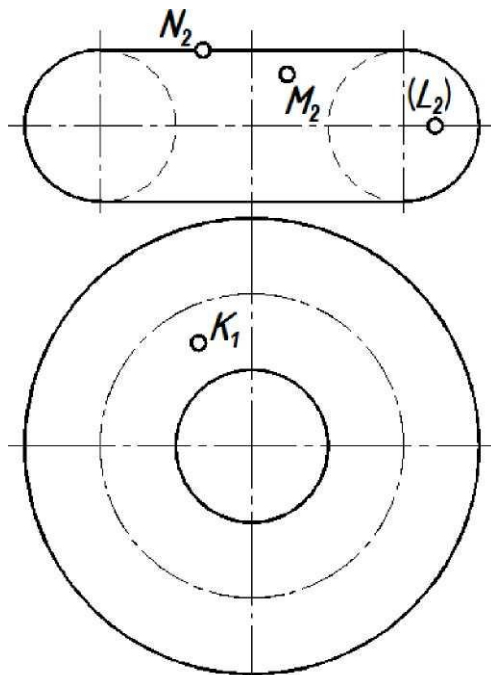


Рисунок 25 - Тор

**Задание 28. Построить недостающие проекции точек, лежащих на поверхности тора и цилиндра (рисунок 26)**

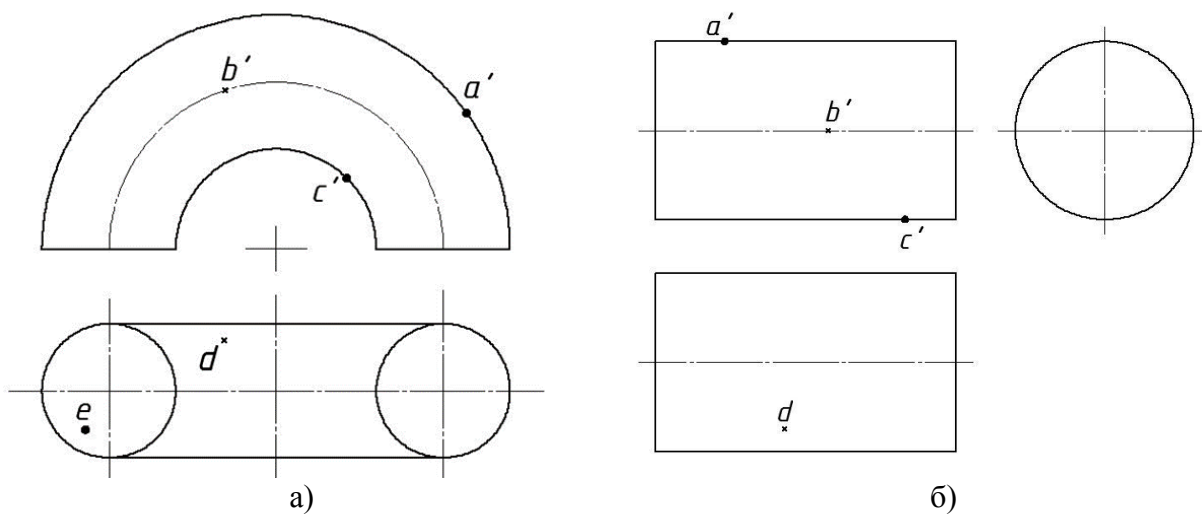


Рисунок 26 – Поверхности (а-тор, б-цилиндр)

### Контрольные вопросы

1. Перечислите основные способы задания поверхности.
2. Что называется направляющей и образующей линией поверхности?
3. Как подразделяются все поверхности по виду образующей?
4. Что такое определитель поверхности?
5. Что называется очерком поверхности? Как изображаются поверхности на комплексном чертеже?
6. Назовите наиболее распространённые виды поверхностей. Дайте их определение и приведите примеры.
7. Назовите основные виды многогранников и их элементы.



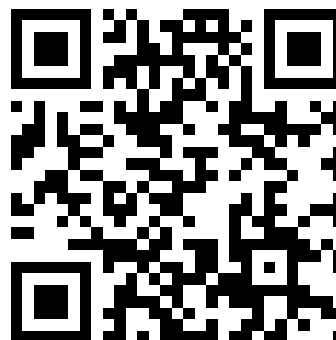
## ТЕМА 8. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКА ПЛОСКОСТЬЮ

*Цель: Формирование пространственного представления о поверхностях, их сечения, способах преобразования чертежа и нахождения натуральной величины сечения.*

Теоретический материал по теме «Пересечение поверхностей плоскостью» находится по ссылкам



Теоретический материал[1]



Видеоурок[4]

**Задание 29: Найти натуральную величину сечения пирамиды (рисунок 27).**

**Алгоритм выполнения:**

1. Ознакомьтесь с условием задания в таблице 11. Построить горизонтальную, фронтальную и профильную проекции пирамиды. Выполнить иссечение пирамиды.
  2. Выполнить чертеж усеченной пирамиды, найти натуральную величину сечения.
- Задание выполняется по вариантам на формате А4.

Таблица 11- Исходные данные

Об- ние	Вариант														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<b>h</b>	66	75	80	66	65	75	80	66	65	75	80	66	65	75	80
<b>d</b>	70	65	80	76	70	65	80	76	70	65	80	76	70	65	80
<b>m</b>	40	35	42	55	40	35	42	55	40	35	43	55	40	35	40
<b><math>\alpha^\circ</math></b>	45	45	45	30	45	45	45	30	45	45	45	30	45	45	45
Об- ние	Вариант														
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
<b>h</b>	66	60	75	80	66	60	75	80	66	60	75	80	66	60	75
<b>d</b>	76	72	65	80	76	70	65	80	76	72	65	80	76	70	65
<b>m</b>	55	42	35	46	55	40	35	46	55	40	35	44	55	40	35
<b><math>\alpha^\circ</math></b>	45	45	45	45	30	45	45	45	30	45	45	45	30	45	45

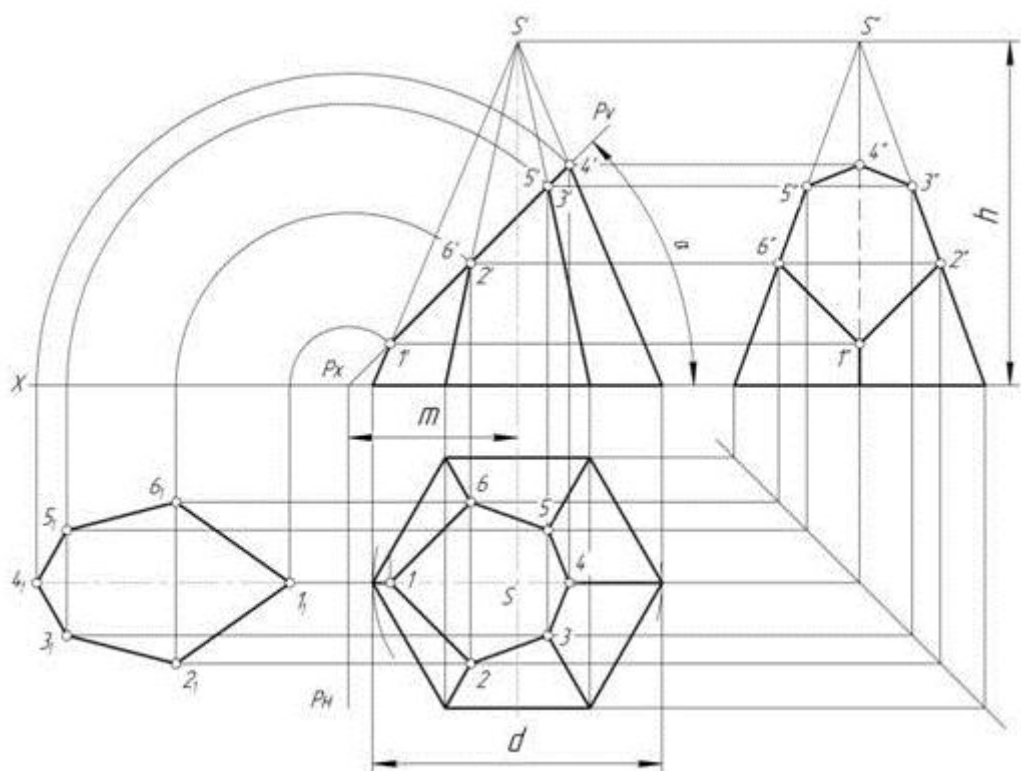


Рисунок 27-. Пример нахождения натуральной величины сечения пирамиды

### Контрольные вопросы

1. Что представляет из себя сечение гранных поверхностей?
2. Какие существуют способы нахождения натуральной величины сечения?
3. Какие сечения получаются при пересечении пирамиды плоскостями частного положения?
4. Какие сечения получаются при пересечении призмы плоскостями частного положения?

## ТЕМА 9. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТЬЮ ПОСТРОЕНИЕ РАЗВЕРТОК ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

*Цель: Освоить практические приемы построения геометрических тел.*

Теоретический материал по темам «Пересечение тел вращения плоскостью» и «Развертки» находится по ссылкам



Теоретический материал «Пересечение тел вращения плоскостью»[1] Теоретический материал «Развертки».[5]

**Задание 30. Найти натуральную величину сечения конуса, построить развертку усеченного конуса.**

### Алгоритм построения развертки прямого конуса с отсеченной вершиной

1. Ознакомиться с условиями задания в таблице 12. Построить фронтальную, горизонтальную и профильную проекции конуса.

2. «Построить развертку боковой поверхности конуса. Этой разверткой является круговой сектор, радиус которого равен натуральной величине образующей конуса, а длина дуги равна длине окружности основания конуса: провести осевую линию из точки S на свободном поле формата. На осевой линии описать радиусом, равным длине  $S'a' = L$  образующей конуса, дугу окружности. На дуге окружности отложить длину окружности основания конуса  $c = \pi d$ .»[1]

Угол  $\alpha$  рассчитать по формуле:

$$\alpha = \frac{\pi d}{L} \quad (1)$$

где  $d$  – диаметр окружности основания конуса,  $L$  – образующая конуса.

К полученной фигуре – сектору добавить окружность, диаметр, которой равен диаметру основания конуса.

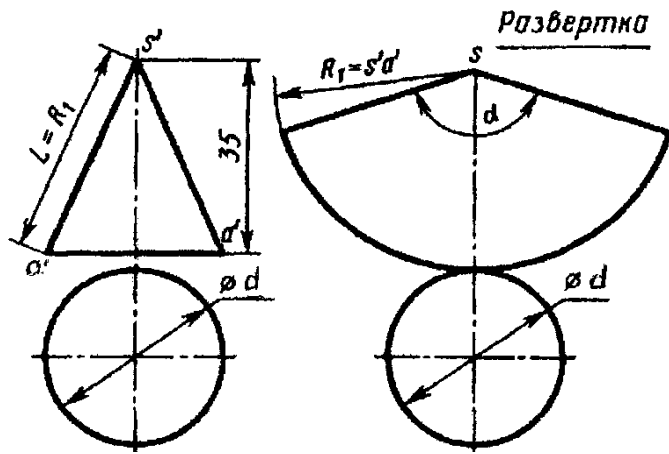


Рисунок 28 - Развертка поверхности прямого кругового конуса

3. “Чтобы на развертку нанести точки фигуры сечения (А, В, С, D, F, G, K), нужно предварительно определить их натуральные расстояния от вершины S, для чего следует перенести точки  $A_2, B_2, C_2, D_2, F_2, G_2, K_2$  на соответствующие натуральные величины образующих конуса. Так как в прямом конусе все образующие равны, то достаточно перенести проекции точек сечения на крайние образующие  $S_21_2$  и  $S_27_2$ . Таким образом, отрезки  $S_2A^*, S_2B^*, S_2D^*, S_2F^*, S_2G^*, S_2K^*$  являются искомыми, т.е. равными натуральной величине расстояния от S до точек сечения.”[2]

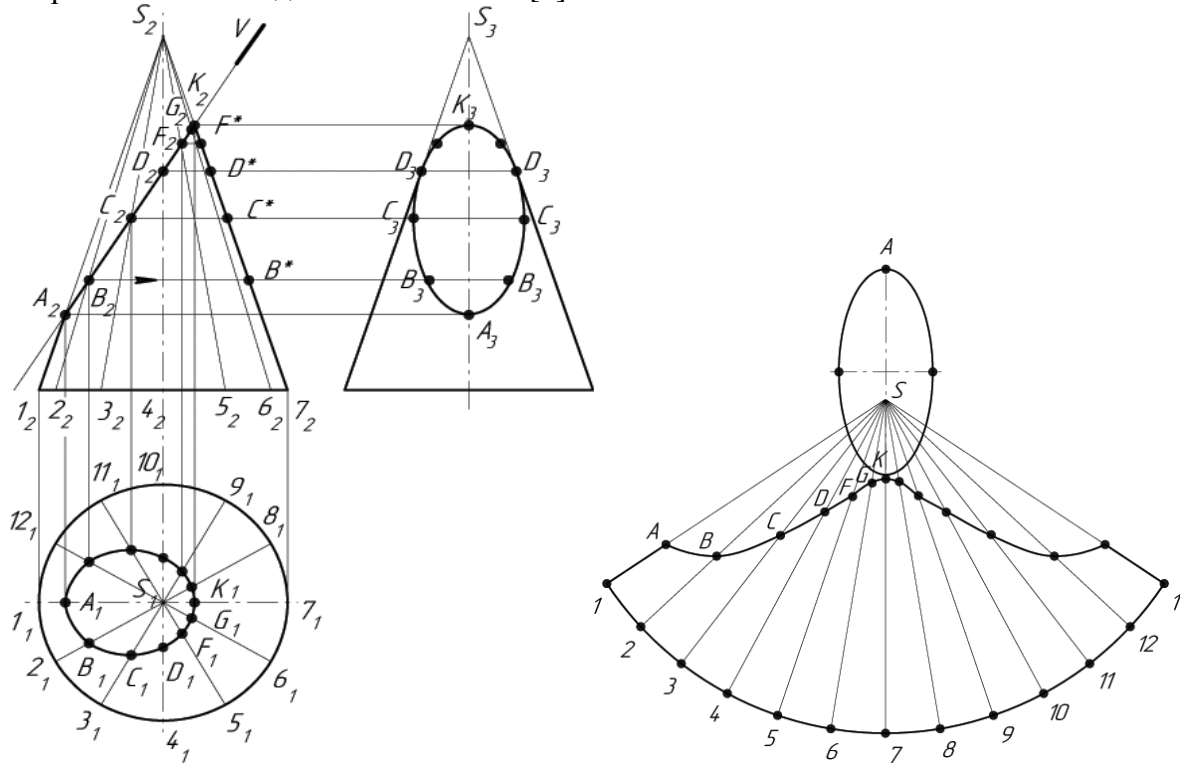


Рисунок 29- Выполнение развертки усеченного конуса

Таблица 12. Исходные данные

	<b>№</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
	H, мм	0	0	0	0	0	10	10	10	10	10
	$\alpha^\circ$	30	35	40	45	50	30	35	40	45	50
	<b>№</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>
	H, мм	15	15	15	15	15	20	20	20	20	20
	$\alpha^\circ$	30	10	20	30	40	50	15	30	35	40
	<b>№</b>	<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>	<b>25</b>	<b>26</b>	<b>27</b>	<b>28</b>	<b>29</b>	<b>30</b>
	H, мм	25	25	25	25	25	30	30	30	30	30
	$\alpha^\circ$	50	20	25	30	35	40	45	50	15	20

### Контрольные вопросы

1. Как построить развертку боковой поверхности усеченного конуса, если нельзя достроить этот конус до полного?
2. Какие методы используются для построения разверток цилиндрических и конических поверхностей?
3. Как произвести условную развертку сферической поверхности?
4. Что подразумевается под термином "развертка поверхности"?
5. Какие поверхности можно развернуть?
6. Какие свойства поверхностей сохраняются при их развертке?
7. Какие методы используются для построения разверток и каково их содержание?
8. В каких случаях применяются методы нормального сечения, раскатки и треугольников для построения разверток?

## ТЕМА 10. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ (ВРАЩЕНИЯ)

**Цель:** *Формирования пространственного восприятия линии пересечения поверхностей.*

Теоретический материал по теме «Взаимное пересечение поверхностей» находится по [ссылкам](#)



Теоретический материал по теме «Взаимное пересечение поверхностей»[1]

Видеоурок «Способ секущих плоскостей»[4]

Видеоурок «Способ сфер»[4]

«Способ

**Задание 31.** Построить линию пресечения поверхностей вращения способом вспомогательных секущих плоскостей (рисунок 30, исходные данные таблица 13) и способом вспомогательных сферических поверхностей (рисунок 31, исходные данные таблица 14). Чертеж выполнить на формате А3

### **Алгоритм построения:**

Для построения линии пересечения поверхностей методом секущих плоскостей необходимо:

1. Провести вспомогательную секущую плоскость, выбрав её так, чтобы она пересекала обе заданные поверхности по простейшим линиям – окружностям или прямым;
2. Построить линии пересечения вспомогательной плоскости с обеими поверхностями;
3. Найти точки пересечения полученных линий;
4. С помощью ещё нескольких секущих плоскостей найти необходимое количество точек и их соединить.

Для построения линии пересечения поверхностей методом вспомогательных сферических поверхностей необходимо:

При этом возможны два случая:

- А) Если оси поверхностей вращения пересекаются, то для построения линии пересечения этих поверхностей применяют семейство концентрических сфер;**
- Б) Если оси поверхностей вращения не пересекаются, то используют эксцентрические сферы.**

Алгоритм решения задачи способом концентрических сфер:

1. Найти точку пересечения осей заданных поверхностей. Построить вспомогательные сферы – посредники, принимая их центр в точке пересечения осей поверхностей;
2. Определить окружности, по которым пересекаются сферы посредники с каждой из заданных поверхностей;
3. Найти общие точки пересечения полученных окружностей.

### **Пример выполнения задания методом секущих плоскостей.**

Рассмотрим задачу на построение линии пересечения поверхностей прямого кругового цилиндра и закрытого тора (рисунок 30).

«Для построения линии пересечения потребуется профильная проекция заданных поверхностей, а в качестве вспомогательных секущих плоскостей следует

воспользоваться горизонтальными плоскостями уровня  $\gamma_v$ . Пересечение профильных очерков определяет опорные точки  $A$  и  $G$  ( $A_3, G_3$ ). Фронтальные проекции этих точек  $A_2$  и  $G_2$  находим по горизонтальным линиям связи, а  $A_1$  и  $G_1$  – по координате  $y$ , измеренной от вертикальной плоскости симметрии цилиндра или от оси  $i(i_3, i_1)$  тора.»

«Плоскость  $\gamma_v$  пересекает тор по параллели и проходит через образующую фронтального очерка цилиндра. Пересечение их горизонтальных проекций определяет точки  $B$  ( $B_1 \rightarrow B_2$ ) и  $B'$  ( $B'_1 \rightarrow B'_2$ ). Это самые высокие точки, и они же являются верхней границей видимости для цилиндра.»

«Аналогично находим самые нижние точки  $F$  ( $F_1 \rightarrow F_2$ ) и  $F'$  ( $F'_1 \rightarrow F'_2$ ). (для них посредник не обозначен, а точки  $F_1$  и  $F'_1$  определены засечками из без построения всей параллели).»

«Точки  $C$  ( $C_3 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1$ ),  $C'$  ( $C'_3 \rightarrow C'_2 \rightarrow C'_1$ ) и  $E$  ( $E_3 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1$ ),  $E'$  ( $E'_3 \rightarrow E'_2 \rightarrow E'_1$ ) пересечения главного меридиана тора с цилиндром определяются по линиям связи и не требуют дополнительных построений.»

«Точки  $D$  ( $D_1 \rightarrow D_2$ ) и  $D'$  ( $D'_1 \rightarrow D'_2$ ), принадлежащие образующей горизонтального очерка цилиндра, определяются с помощью посредника  $\gamma(\gamma^3_3)$ . На профильной проекции от  $i_3$  измерим радиус параллели в плоскости  $\gamma^3_3$ , этим радиусом строим окружность с центром  $i_1$ , и ее пересечение с очерком цилиндра определяет точки  $D_1$  и  $D'_1$ .»

«Для определения случайных точек  $1, 1$  воспользуемся посредником  $\gamma^1$  ( $\gamma^1_3$ ), который пересекает цилиндр по образующей, находящейся на расстоянии  $y$  от вертикальной плоскости симметрии цилиндра.»

«Если на горизонтальной проекции расстояние  $y$  отложить от оси цилиндра в соответствующую сторону, то мы построим горизонтальную проекцию этой образующей, а ее пересечение с проекцией соответствующей параллели тора определяет случайные точки  $1_1$  и  $1'_1$  линии пересечения. По линиям связи отмечаем точки  $1_2$  и  $1'_2$  на фронтальной проекции.»

«Можно решить задачу и без профильной проекции заданных поверхностей, если построить дугу окружности основания радиусом  $R$  из проекции  $O_2$  центра основания цилиндра, которую можно рассматривать как проекцию цилиндра на плоскость, перпендикулярную его оси. Тогда координата  $y$  для любой образующей плоскости  $\gamma$  определяется по этой дуге, как показано на рисунке 30.»[2]

Полученные точки соединяются плавной кривой с учетом видимости.

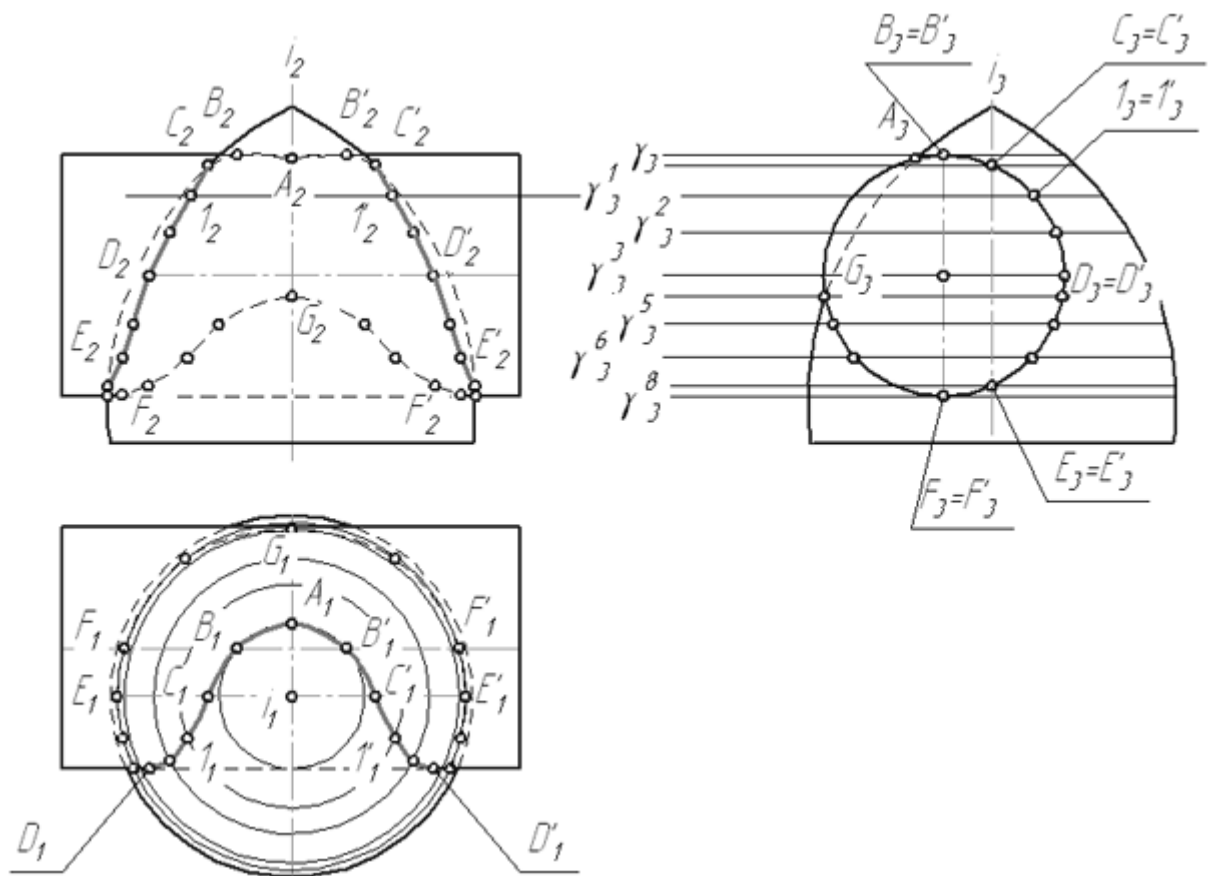


Рисунок 30 – Построение линии пересечения поверхностей методом вспомогательных секущих плоскостей.

### Пример выполнения задания методом вспомогательных концентрических сфер.

На рисунке 31 показано, построение линии пересечения двух конусов вращения, оси которых пересекаются, образуя общую фронтальную плоскость симметрии. В этом случае для построения используются вспомогательные сферы с радиусами, которые находятся в определенном диапазоне.

Центром этих сфер является точка  $O$  ( $O_2$ ), которая представляет собой точку пересечения осей конусов. Радиусы сфер определяются на основе минимального и максимального радиусов.

Минимальный радиус секущей сферы выбирается таким образом, чтобы сфера касалась одной из пересекающихся поверхностей и пересекала другую. Максимальный радиус определяется как расстояние от центра сферы до наиболее удаленной точки пересечения контуров пересекающихся поверхностей.

Окружности, образованные пересечением сфер с обеими поверхностями, проецируются на фронтальную плоскость в виде прямолинейных отрезков.

«Точки пересечения фронтальных проекций очерковых образующих  $1_2 2_2 3_2 4_2$  являются высшими и низшими точками линии пересечения. Точки  $5_2 6_2$  на фронтальной проекции, наиболее близко расположенные к оси вертикального конуса определены с помощью сферы радиуса  $R_{min}$ , вписанной в этот конус. Промежуточные точки  $7_2 8_2 9_2$  получены при помощи сферы радиуса  $R$ , очерк которой на фронтальной проекции изобразится в виде окружности этого же радиуса. Сфера радиуса  $R$  пересечет горизонтальный конус по окружности диаметра  $AB$  и  $CD$ , а вертикально расположенный конус – по окружности  $EF$  и  $MN$ . В пересечении полученных проекций окружностей – отрезков  $A_2 B_2$  и  $C_2 D_2$  с  $E_2 F_2$  и  $M_2 N_2$  – получаем искомые точки  $7_2 8_2 9_2$  линии пересечения. Изменяя радиус  $R$  вспомогательной секущей сферы, можно получить последовательный ряд



точек линии пересечения. Недостающие горизонтальные проекции точек линии пересечения определяют на соответствующих параллелях вертикального конуса.»[3]

Точки  $11_1$  и  $12_1$ , в которых происходит разделение горизонтальной проекции линии пересечения на видимую и невидимую ветви, определены с помощью горизонтальной плоскости  $\Phi$ , проходящей через ось горизонтального конуса.

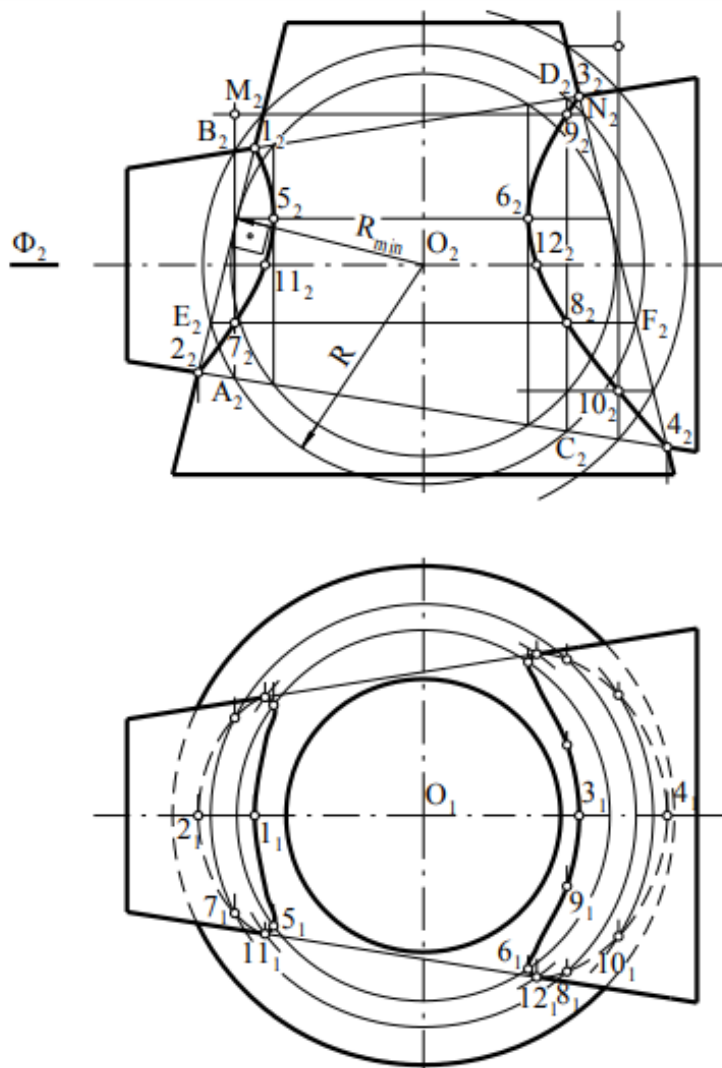


Рисунок 31 – Построение линии пересечения поверхностей методом вспомогательных концентрических сфер.

### Пример выполнения задания методом эксцентричных сфер

Для построения линии пересечения открытого тора и конуса методом эксцентричных сфер рассмотрим следующий пример (рисунок 32):

Поверхности тора и конуса имеют общую плоскость симметрии и не пересекающиеся оси вращения. Поверхности заданы фронтальными отрезками - образующими.

Определяем точки 1 и 2 пересечения образующих поверхностей. Затем через ось вращения тора проводим фронтально-проецирующую плоскость  $\Phi$ . Она пересекает тор по окружности.

Центры сфер, касающихся тора по окружности, лежат на перпендикуляре к плоскости  $\Phi$ , восстановленном в центре окружности. Пересечение этого перпендикуляра с осью конуса дает центр  $O_2$  вспомогательной секущей сферы радиуса  $R$ .

Такая сфера пересекает тор и конус по окружностям, фронтальные проекции которых - отрезки  $A_2B_2$  и  $C_2D_2$ .

«Точка  $3_2$  и  $3'_2$  пересечения окружностей принадлежат фронтальной проекции линии пересечения поверхностей. Аналогично определяют другие промежуточные точки линии пересечения поверхностей. Вспомогательные сферы имеют различные центры, находящиеся на оси конуса вращения.»[2]

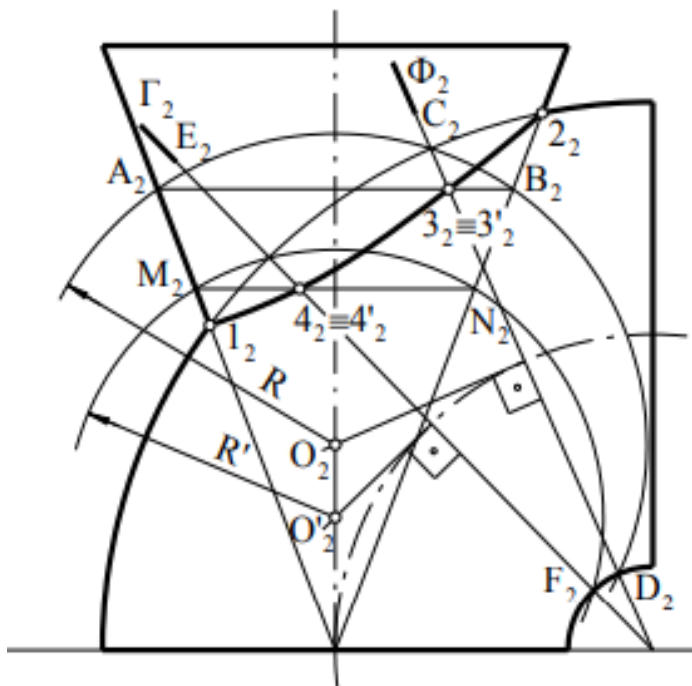


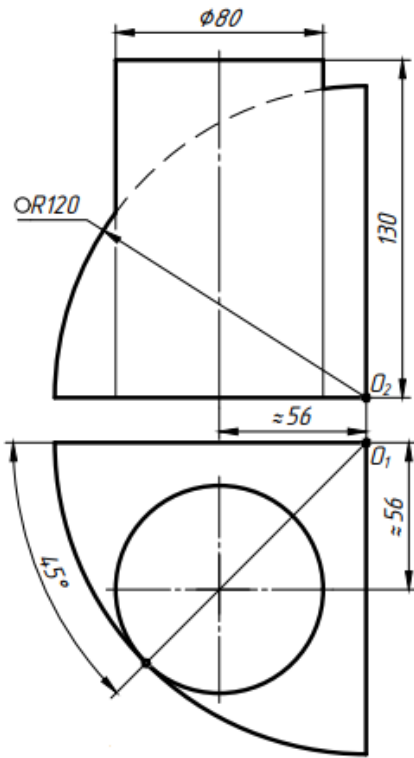
Рисунок 32 – Построение линии пересечения поверхностей методом вспомогательных концентрических сфер.

Таблица 13 – Исходные данные к эпюру «Пересечение поверхностей методом вспомогательных секущих плоскостей»

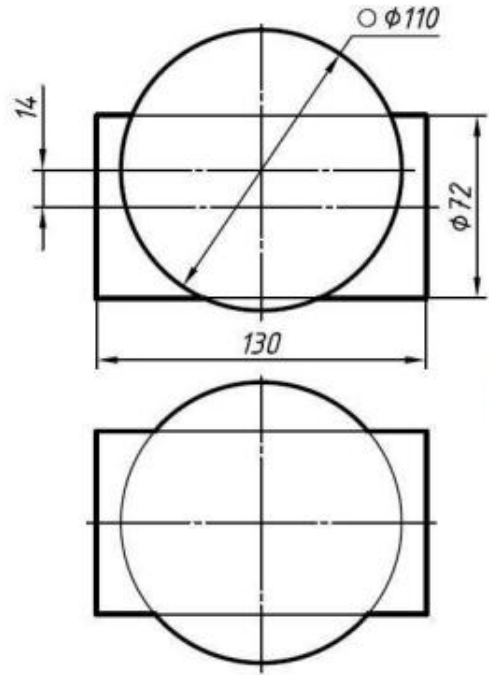
Вариант	
1	2

Продолжение таблицы 13

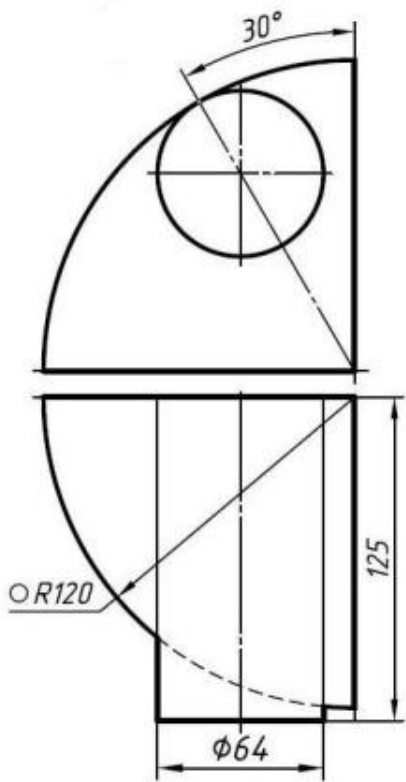
3



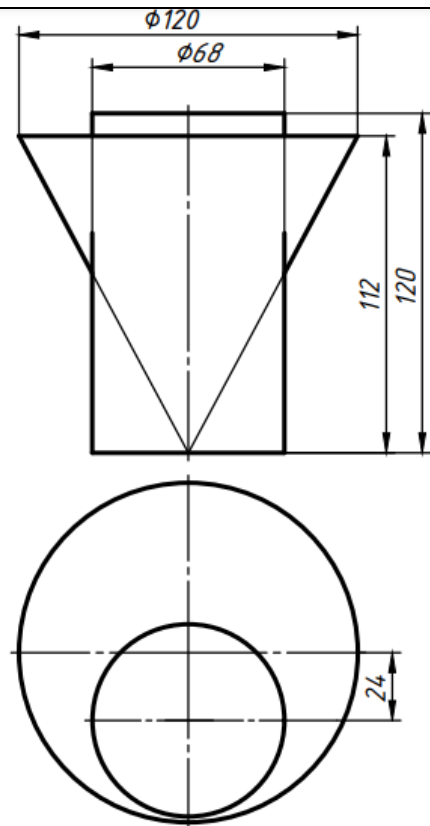
4



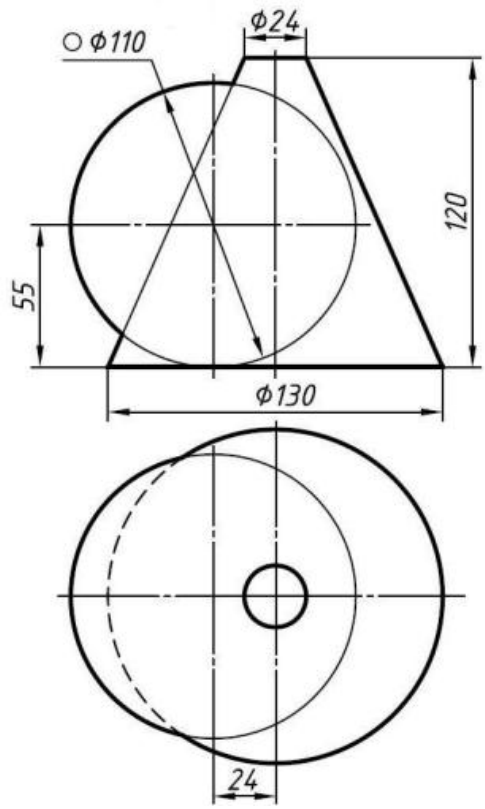
5



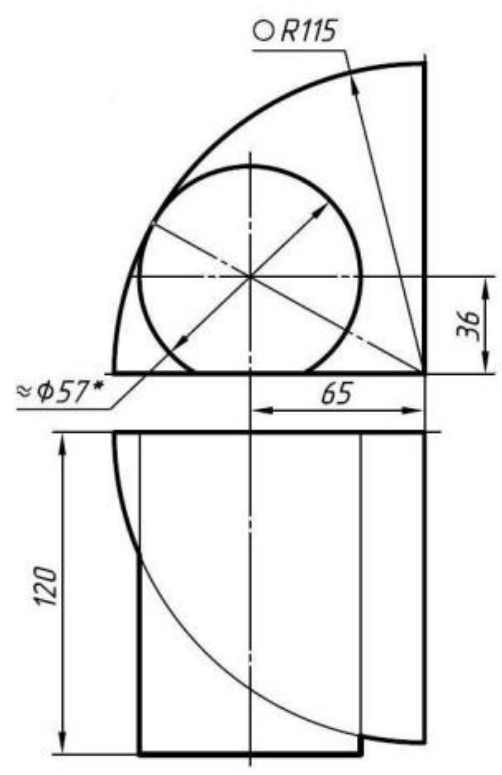
6



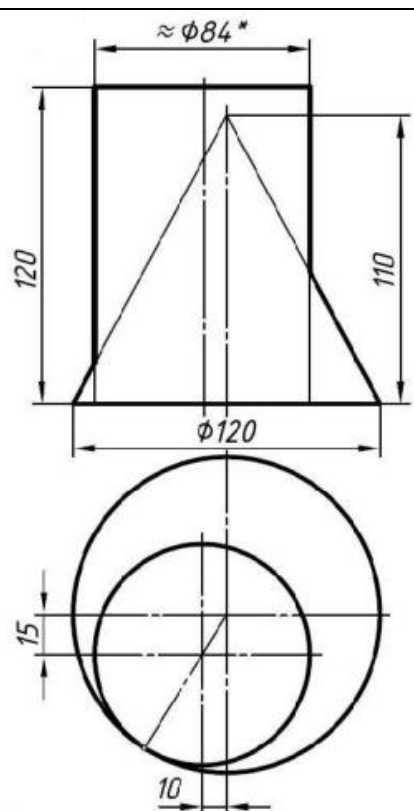
7



8

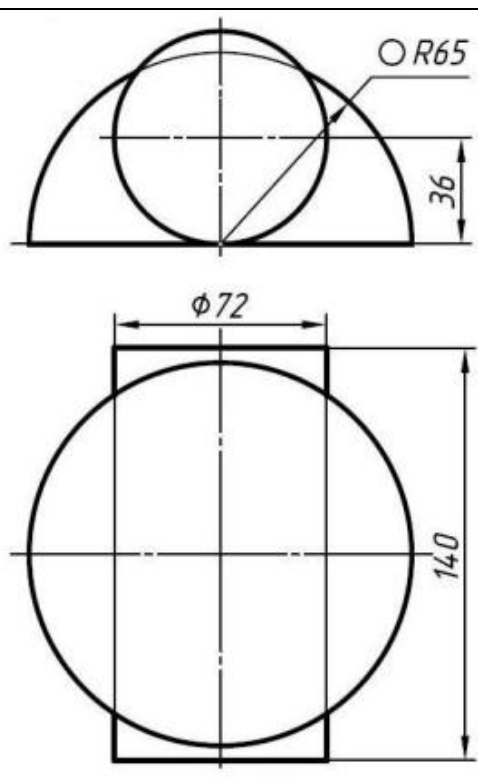


9



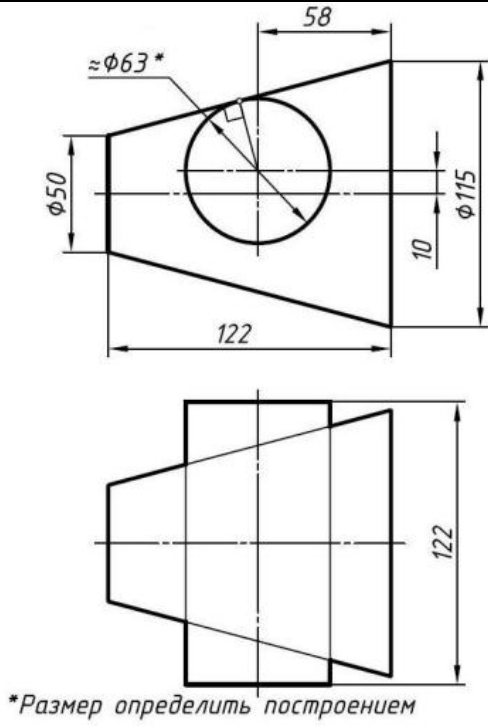
\*Размер определить построением

10

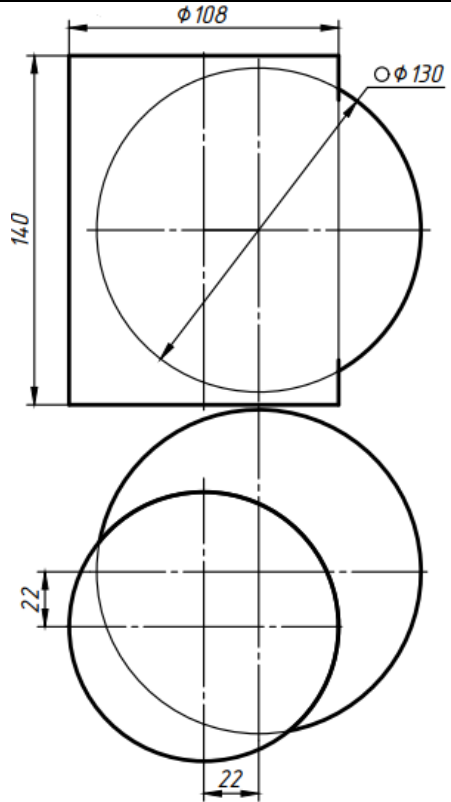


Продолжение таблицы 13

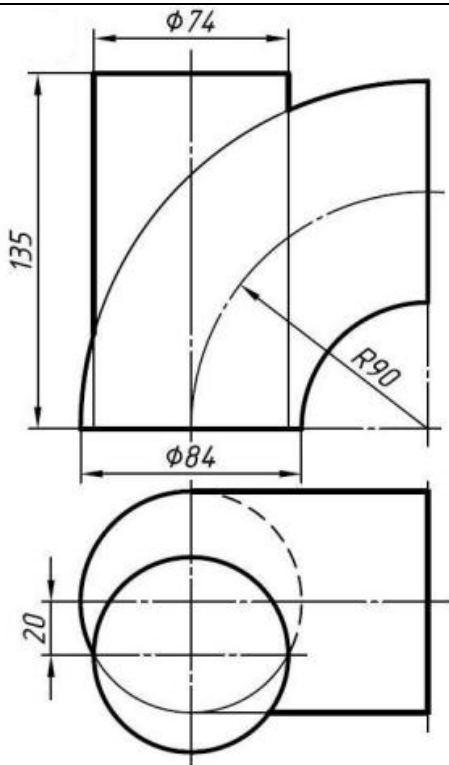
11



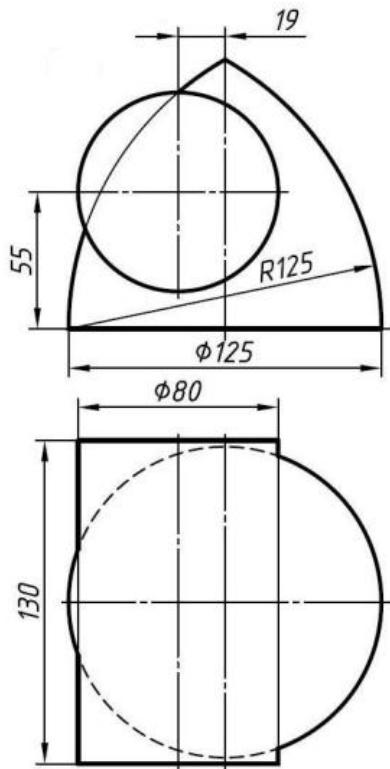
12



13

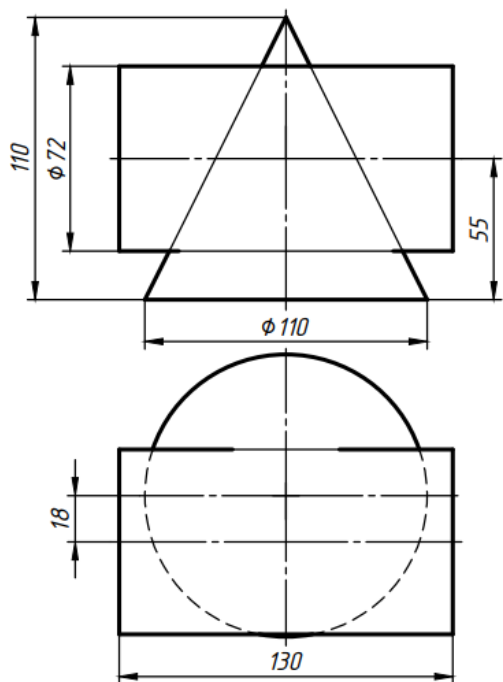


14

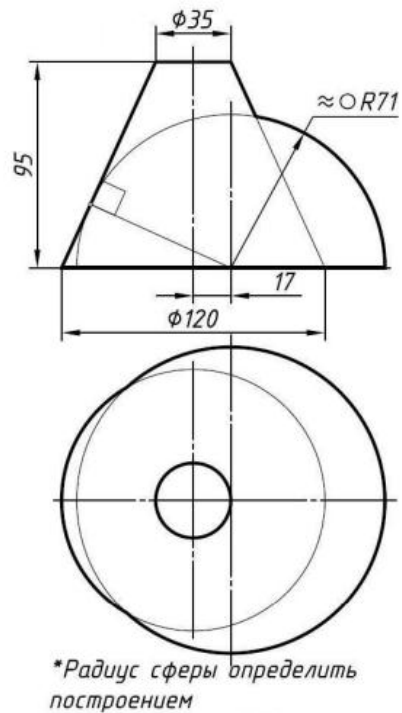


Продолжение таблицы 13

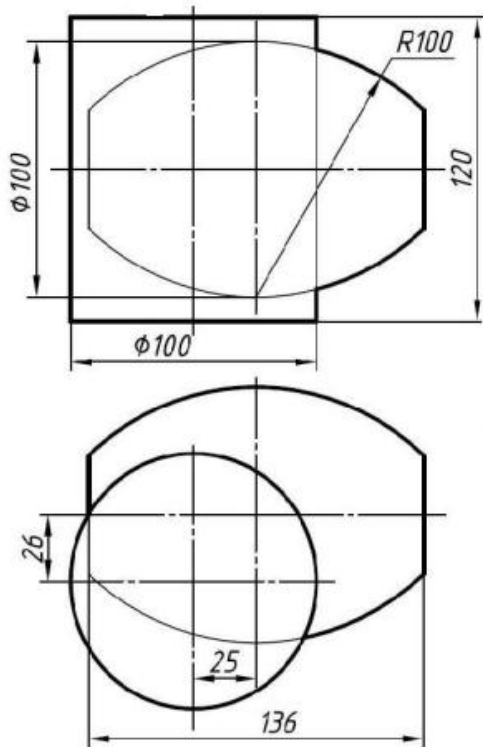
15



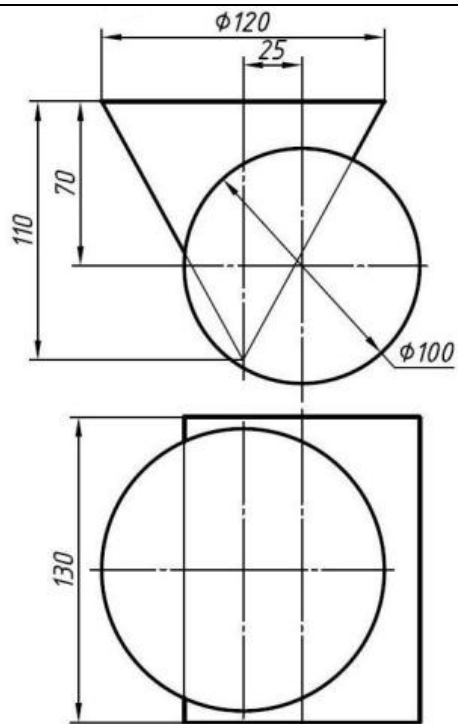
16



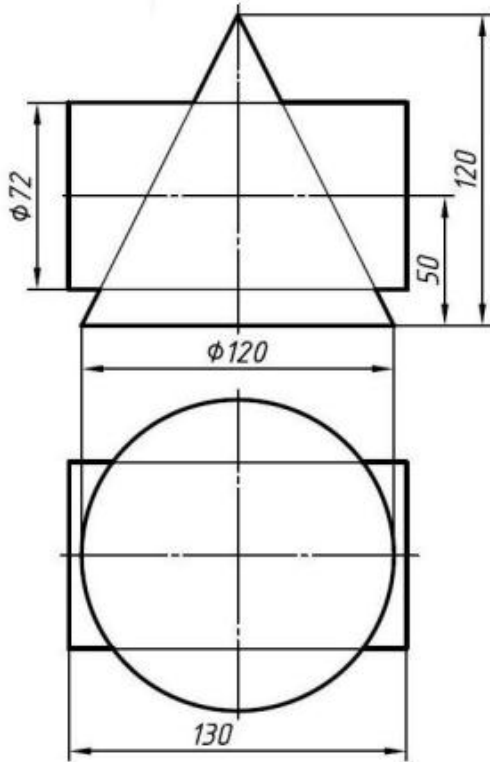
17



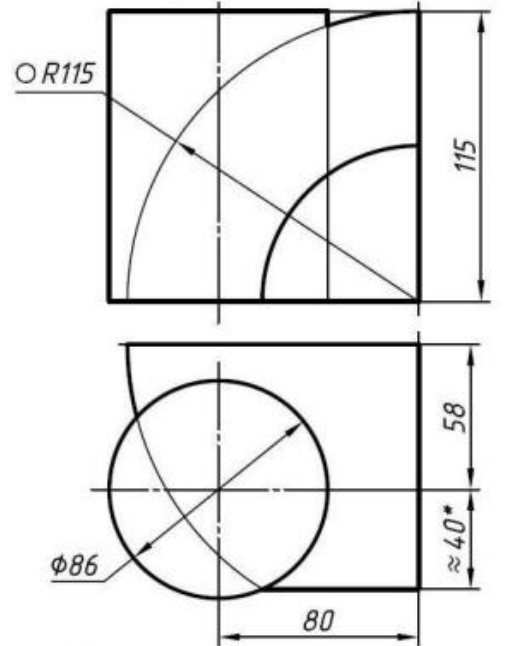
18



19

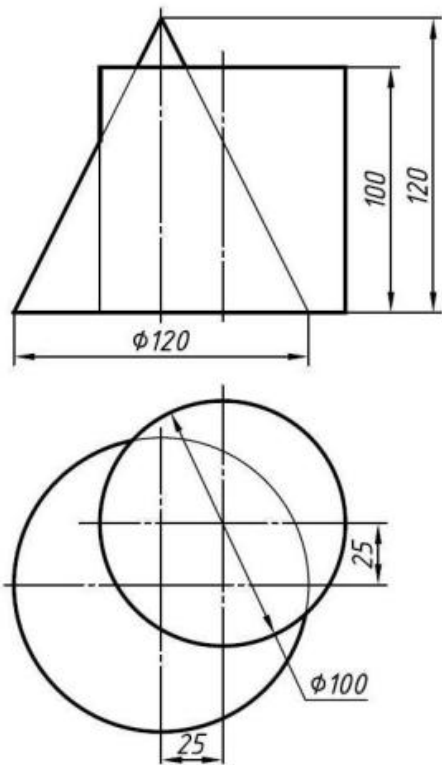


20

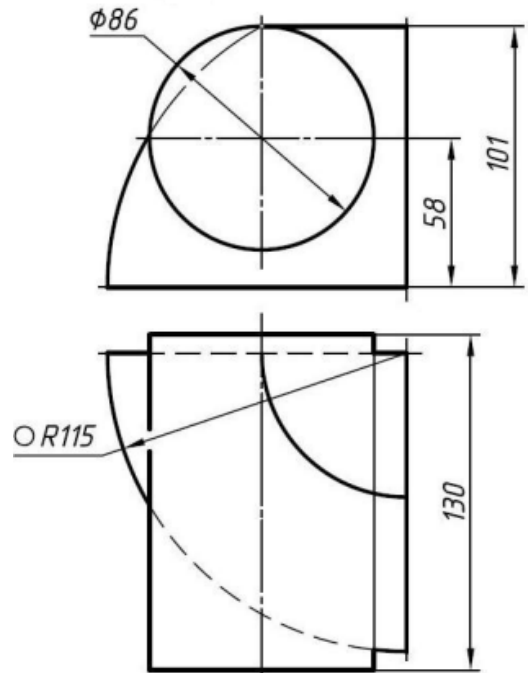


\*Размер определить построением

21



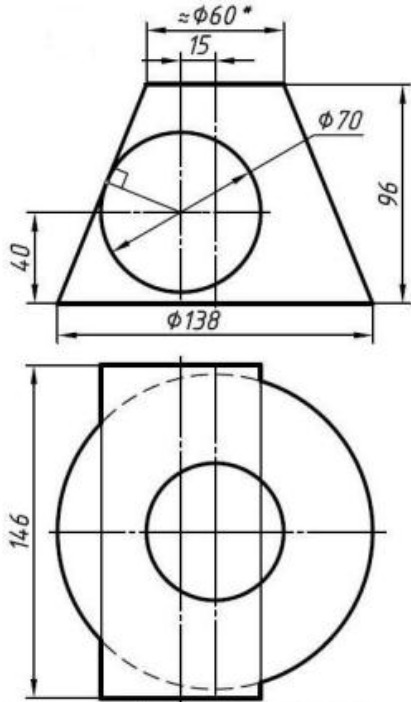
22





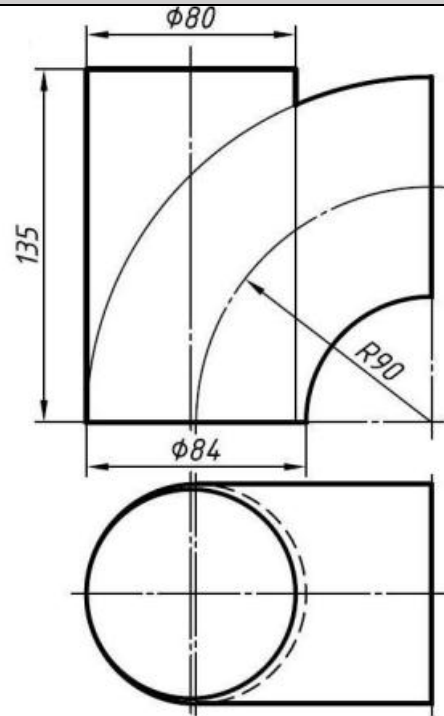
Продолжение таблицы 13

23

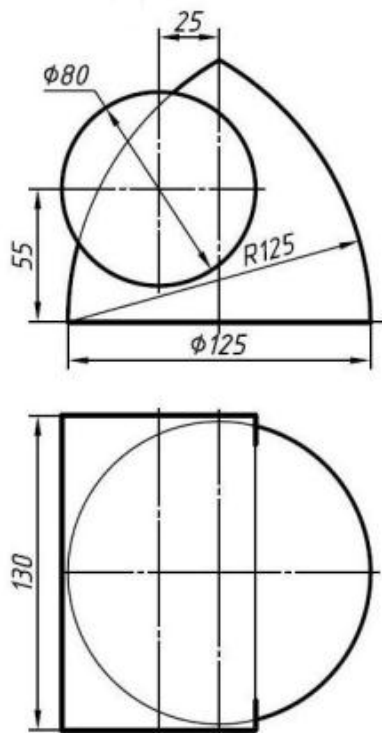


\*Диаметр определить построением

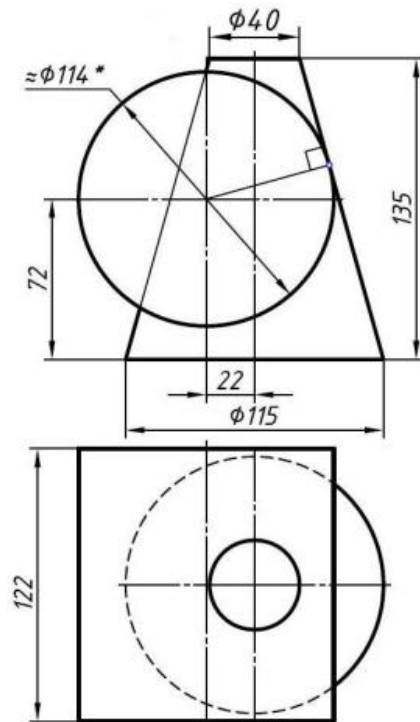
24



25



26

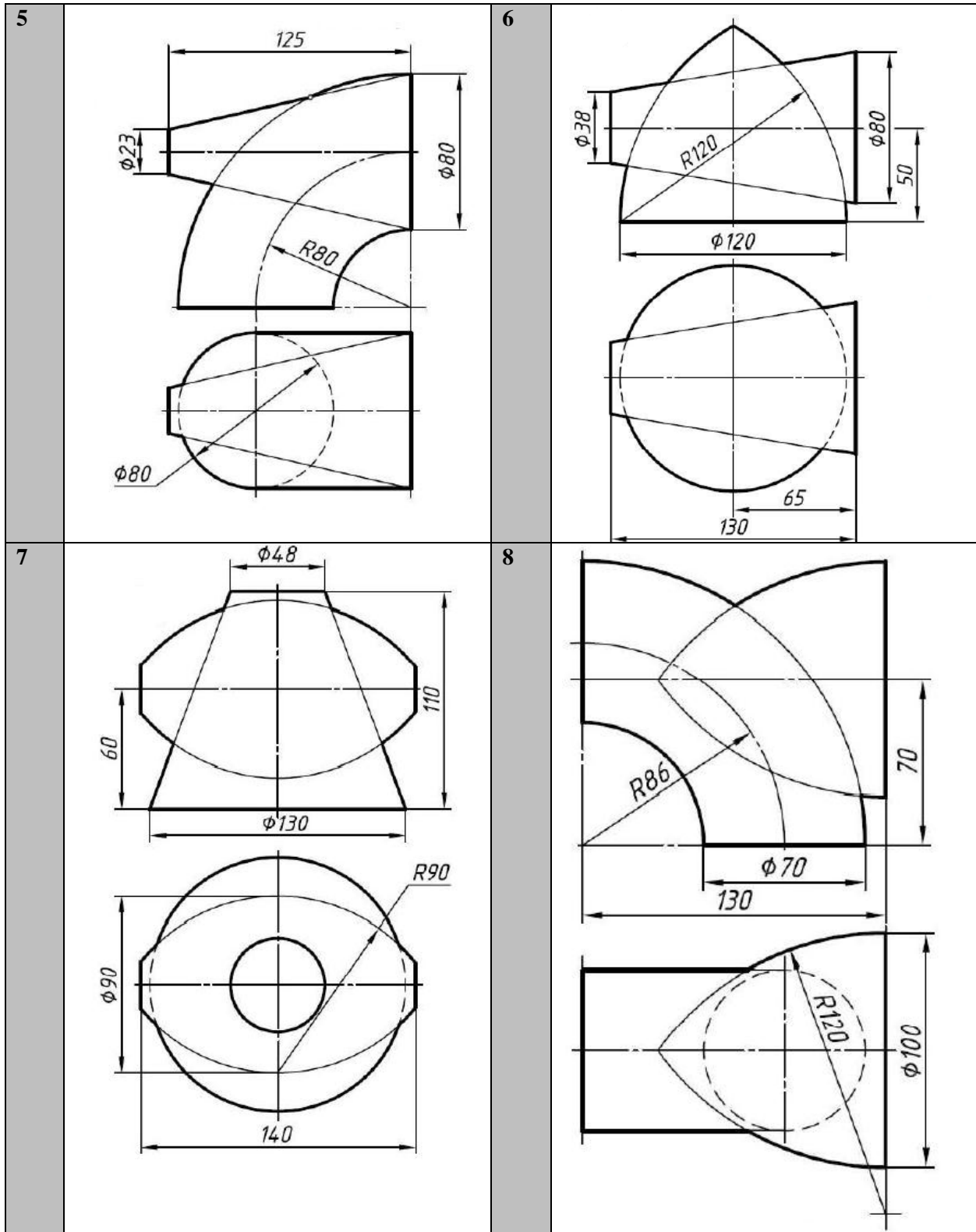


\*Размер определить построением



Таблица 14 – Исходные данные к эяпору «Пересечение поверхностей методом вспомогательных концентрических сфер»

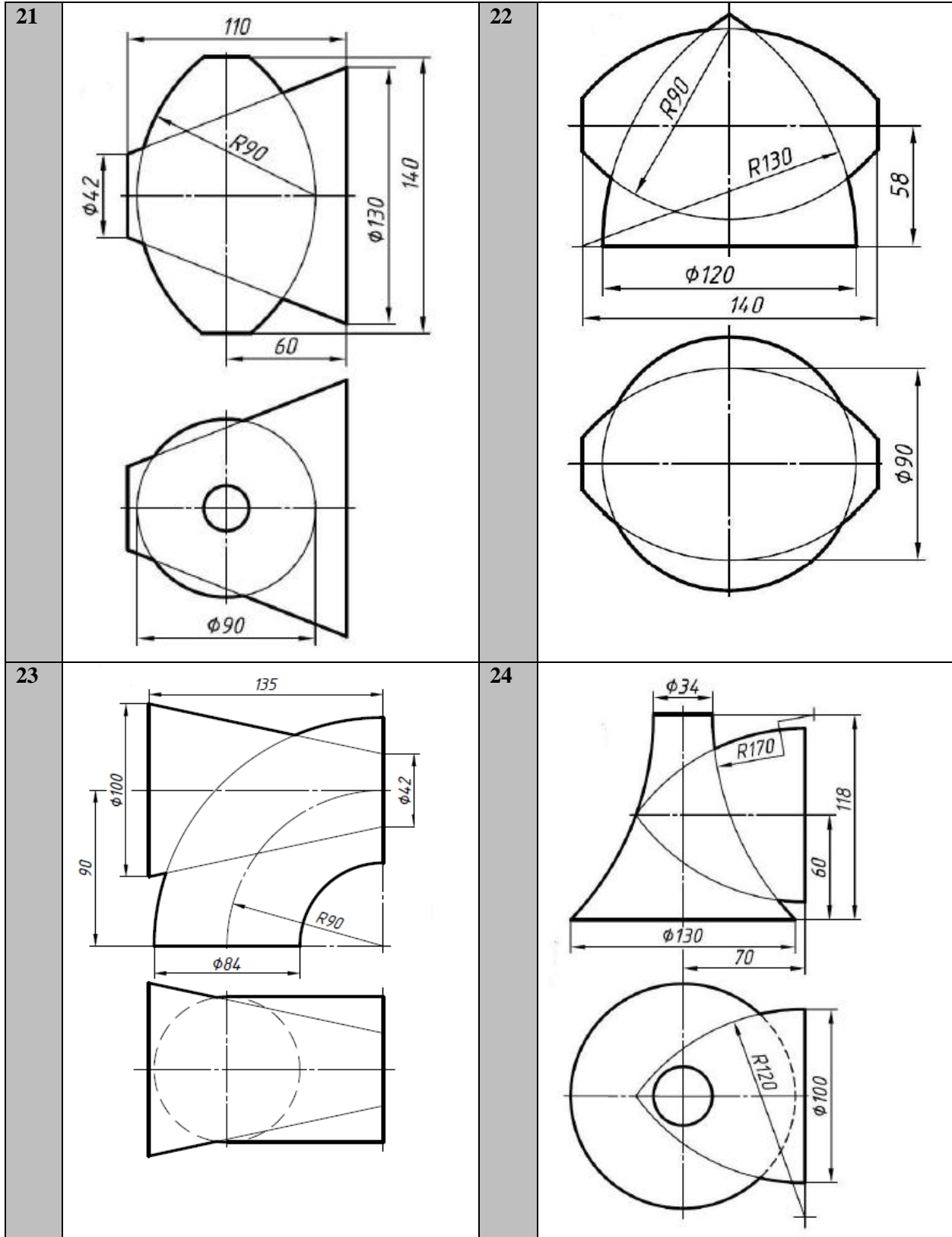
Варианты	
1	
2	
3	
4	

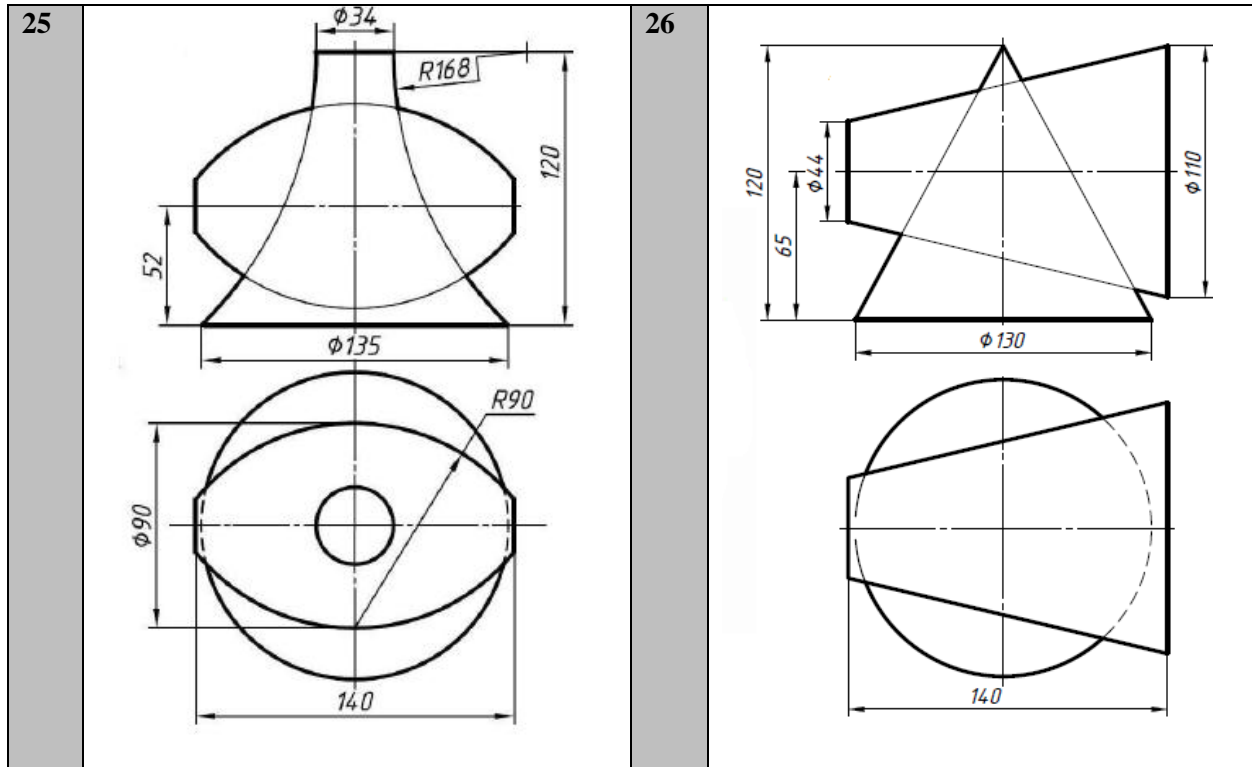


<p>9</p>		<p>10</p>	
<p>11</p>		<p>12</p>	

13	
14	
15	16

<p>17</p>		<p>18</p>	
<p>19</p>		<p>20</p>	





### Контрольные вопросы

1. Что представляет собой линия пересечения двух тел вращения?
2. Какие способы существуют для нахождения линии пересечения?
3. Что представляет собой метод эксцентричных сфер?
4. В чем сущность теоремы Монжа?
5. Какие условия должны быть соблюдены для применения метода концентрических сфер?

## ТЕМА 11. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ (МНОГОГРАННИКИ)

**Цель:** Формирования пространственного восприятия линии пересечения поверхностей.

Теоретический материал по теме «Взаимное пересечение поверхностей» находится по ссылкам



Теоретический материал «Взаимное пересечение поверхностей»



Видеоурок

**Задание 32:** Построить линию пересечения двух многогранников. Задание выполнить на формате А3. Исходные данные в таблице 15.

### Алгоритм построения:

1. Ознакомиться с условиями задания. На формате А3 построить фронтальную, горизонтальную и профильную проекции многогранников.
2. Построить линию пересечения двух многогранников. Определить видимость граней и линии пересечения.

### Пример выполнения задания

На рисунке 33 показано построение линии пересечения двух призм.

Призма  $DEFD_1E_1F_1$  проникает в боковую поверхность призмы  $ABCA_1B_1C_1$ . Следовательно, при пересечении получаются две замкнутые ломаные линии: одна из них - пространственная (пересекаются две грани призмы  $ABCA_1$   $B_1C_1$ ), другая - плоская (пересекается одна грань).

Горизонтальная проекция линий пересечения совпадает с горизонтальной проекцией вертикальной призмы, а профильная - с профильной проекцией горизонтальной призмы.

Отмечая точки пересечения  $1', 2', 3', 4', 5', 6'$  горизонтальных проекций ребер  $D'D_1', E'E_1', F'F_1'$  с горизонтальной проекцией призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , при помощи линий связи находим их фронтальные проекции.

Фронтальные проекции  $7'', 8''$  точек пересечения ребра  $AA_1$  с боковой поверхностью призмы  $DEFD_1E_1F_1$  определим по линиям связи, используя их профильные проекции  $7'''$  и  $8'''$

Последовательно соединяя найденные точки пересечения, принадлежащие одним и тем же граням, построим две ломаные линии 1-3-8-5-7-1 и 2-4-6-2. Видимость проекций участков линии пересечения определяется из условия расположения их на видимой стороне каждой поверхности.



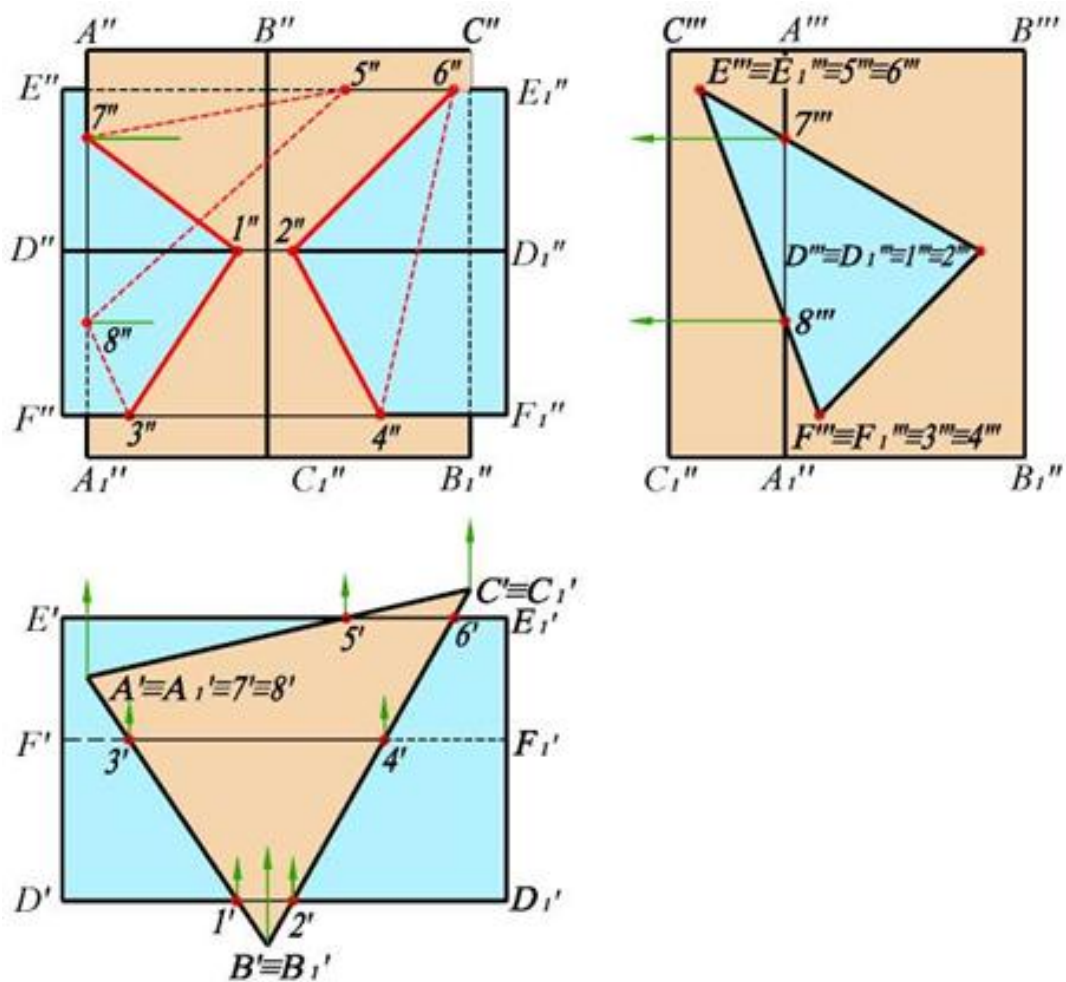


Рисунок 33 – Пример выполнения задания «Пересечение поверхностей (многогранники)»

Таблица 15 – Исходные данные для построения линии пересечения гранных поверхностей.

Варианты	
1	
2	
3	
4	

Продолжение таблицы 15

5		6	
7		8	

Продолжение таблицы 15

<p>9</p>	
<p>10</p>	
<p>11</p>	
<p>12</p>	

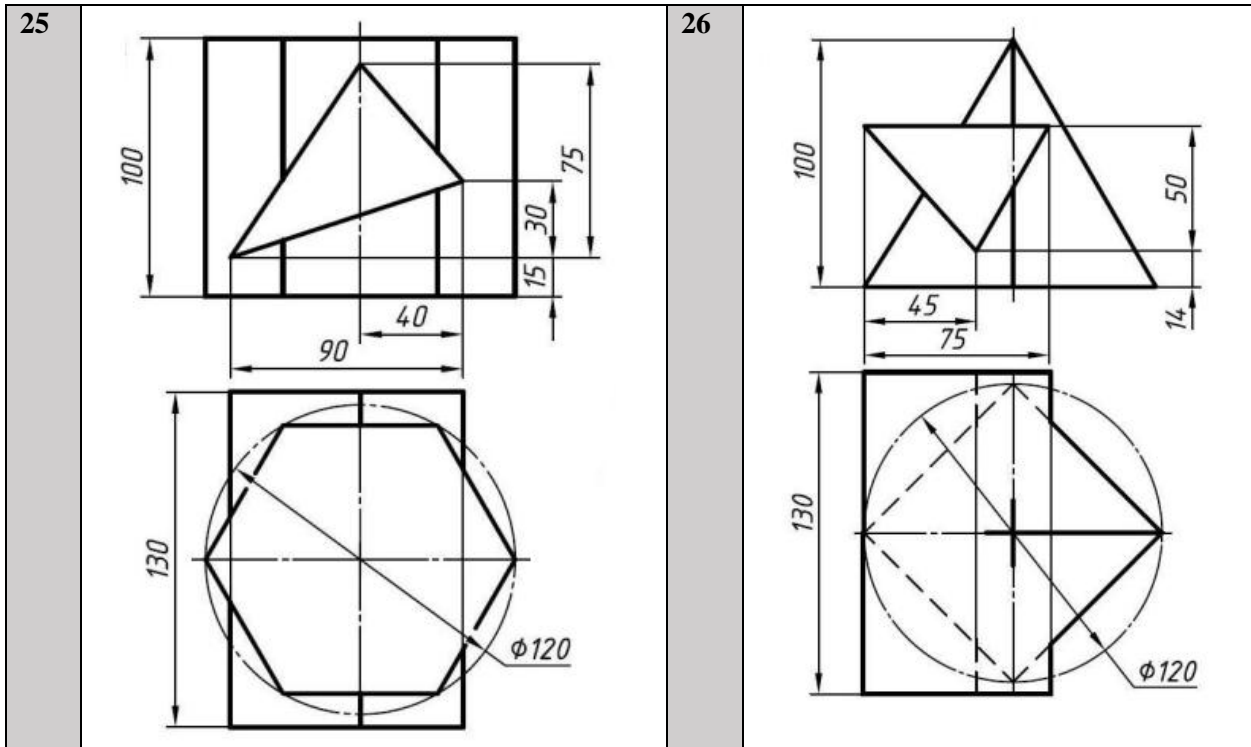
<p>13</p>		<p>14</p>
<p>15</p>		<p>16</p>

<p>17</p>		<p>18</p>	
<p>19</p>		<p>20</p>	

Продолжение таблицы 15

21		22	
23		24	





### Контрольные вопросы

1. Что представляет собой линия пересечения многогранников?
2. В каком случае при пересечении многогранников получается проницание, врезание?
3. В чем заключается способ ребер и способ граней?
4. В какой последовательности соединяются точки пересечения ребер и граней многогранников?
5. Как определяется видимость линии пересечения многогранников?  
Какие способы используются для построения линии пересечения многогранников?
6. Что такое конкурирующие точки?
7. В чем заключается способ ребер?
8. В чем заключается способ граней?



## ТЕМА 12. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ (МНОГОГРАННИК И ПОВЕРХНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ)

**Цель:** *Формирования пространственного восприятия линии пересечения поверхностей.*

Теоретический материал по теме «Взаимное пересечение поверхностей» находится по ссылкам



Теоретический материал по теме «Взаимное пересечение поверхностей»[1]

Видеоурок[4]

**Задание 33. Построить линию пересечения поверхностей. Задание выполнить на формате А3. Исходные данные в таблице 16.**

### Алгоритм выполнения:

1. Ознакомиться с условиями задания. Построить фронтальную, горизонтальную и профильную проекции поверхностей.
2. Определить точки излома линии пересечения, являющиеся точками пересечения ребер многогранника с поверхностью вращения.
3. Найти точки, принадлежащие линиям пересечения отдельных граней многогранника с телом вращения. При этом сначала следует найти характерные (опорные) точки кривых. Это точки, проекции которых отделяют видимую часть проекции линии пересечения от невидимой, а также это проекции наивысших и наименьших точек линии пересечения, ближайших и наиболее удаленных, крайних слева и справа на проекциях линии пересечения.
4. Определить видимости линии пересечения поверхностей и их очерков. Видимость проекций участков линии пересечения определяется из условия расположения их на видимой стороне каждой поверхности.

### Пример выполнения задания

На рисунке 34 приведено построение линии пересечения сферы с прямой трехгранной призмой. Из горизонтальной проекции видно, что в данном случае имеет место проникание сферы призмой. Характерными точками линии пересечения являются точки 1 и 2 - точки пересечения ребер призмы со сферой. Для построения этих точек использованы фронтальные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , проведенные через ребра призмы и пересекающие сферу по окружностям радиусов  $R$  и  $R_1$ .

Фронтальную проекцию  $1''$  точки  $1'$  можно определить и по профильной проекции с помощью линий связи. Так как грань призмы  $BC$  является фронтальной плоскостью, то плоскость  $\beta$  ( $\beta'$ ) позволяет определить дугу окружности, по которой она пересекает сферу. Точка 3 - высшая точка этой дуги.

Грани  $AB$  и  $AC$  призмы пересекают сферу по дугам окружностей, которые на фрон-

тальную и профильную плоскости проекций проецируются в виде частей эллипсов. Фронтальная проекция линии пересечения этих граней представляет собой две симметричные части, а профильные проекции совпадают.

Характерными точками фронтальной проекции линии пересечения являются также точки  $4''$  и  $5''$ . Точка  $4''$  разделяет линию на видимую и невидимую части, точка  $5''$  - высшая точка линии пересечения. Проекция  $4''$  находится на очерке сферы - фронтальном меридиане, проекция  $5''$  определена с помощью фронтальной плоскости  $\gamma$  ( $\gamma'$ )

Для построения промежуточных точек  $6''$  и  $7''$  фронтальной проекции использованы фронтальные плоскости  $\delta$  ( $\delta'$ ) и  $\epsilon$  ( $\epsilon'$ ). Каждая из фронтальных плоскостей пересекает сферу по окружности определенного радиуса, а призму - по горизонтально-проецирующим прямым.

Видимой частью фронтальной проекции линии пересечения является часть эллипса  $1''6''5''4''$ , на профильной проекции симметричные части линии пересечения изображаются видимой линией. На фронтальной проекции части ребер  $B$  и  $C$  закрываются контуром сферы.

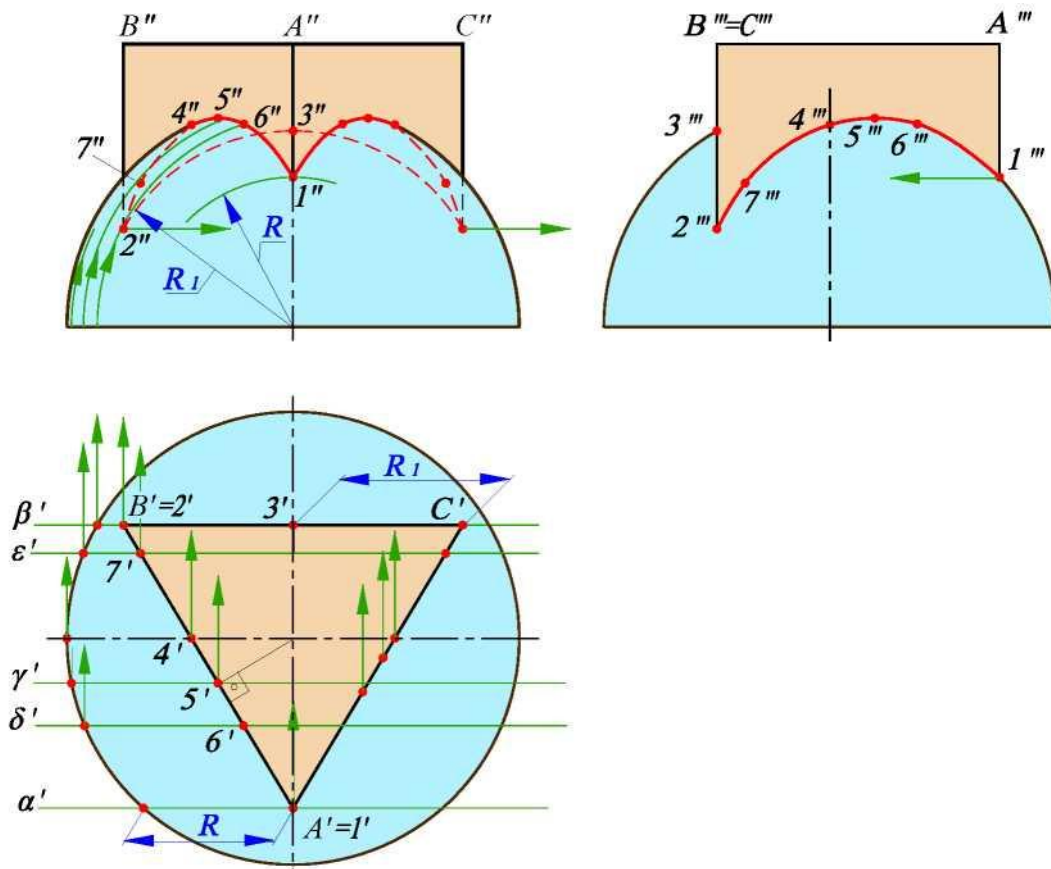


Рисунок 34 – Построение линии пересечения многогранника с телом вращения

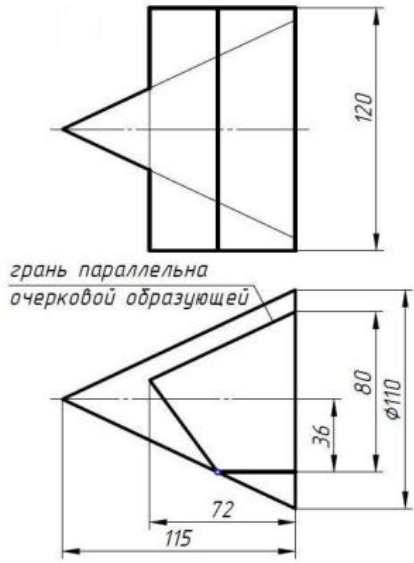
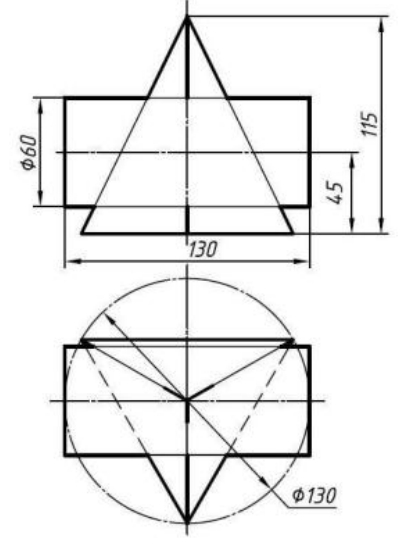
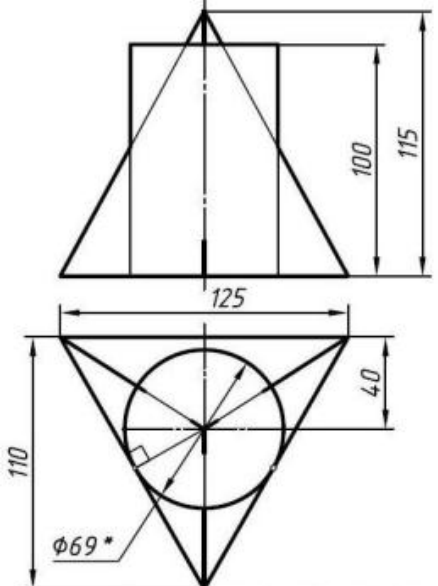
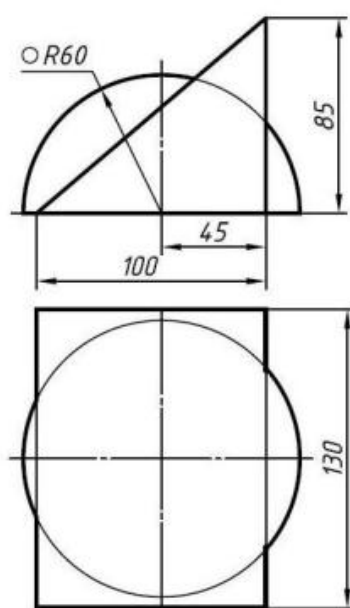
Таблица 16 – Исходные данные для построения линии пересечения многогранника с телом вращения

Вариант	
1	
2	
3	
4	

Продолжение таблицы 16

<p>5</p>	
<p>7</p>	
<p>6</p>	
<p>8</p>	

Продолжение таблицы 16

<p>9</p>	 <p>грань параллельна очерковой образующей</p>	<p>10</p>	
<p>11</p>	 <p>*размер определить построением</p>	<p>12</p>	

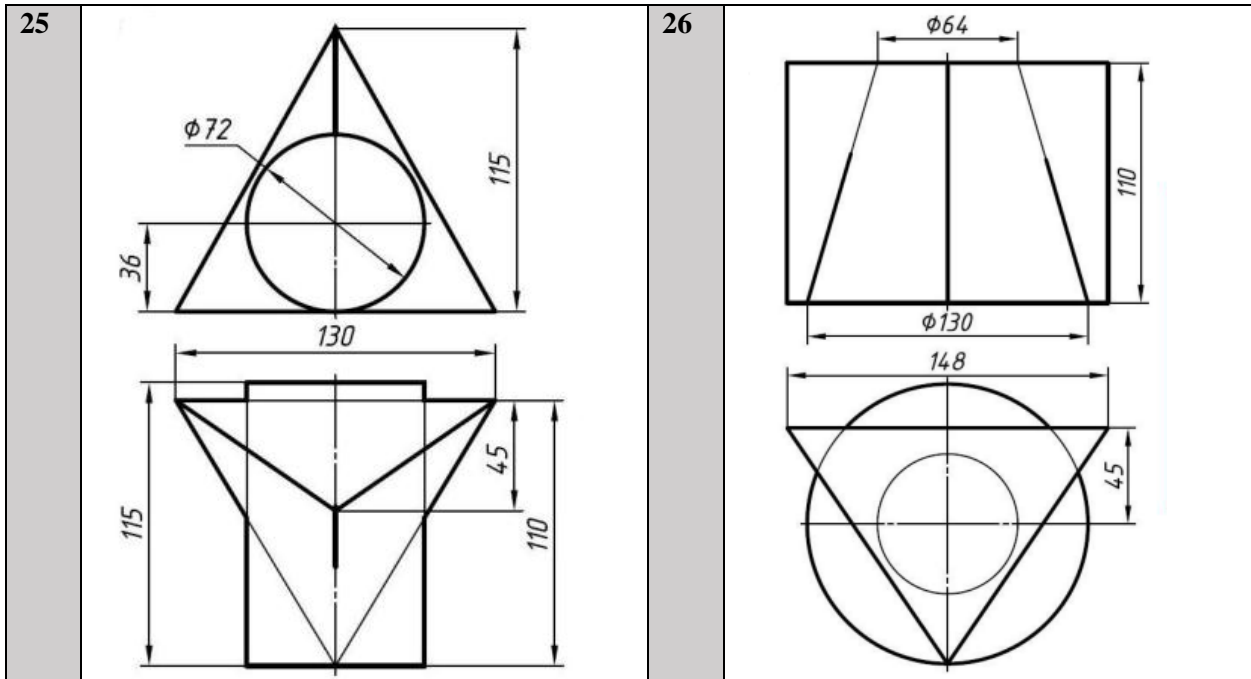
<p>13</p>		<p>14</p>	
<p>15</p>		<p>16</p>	

Продолжение таблицы 16

<p>17</p>	
<p>18</p>	
<p>19</p>	
<p>20</p>	

<p>21</p>		<p>22</p>	
<p>23</p>		<p>24</p>	





**Контрольные вопросы**

1. Что представляет собой линия пересечения тела вращения с многогранником?
2. Какие точки являются характерными при построении линии пересечения?
3. Как определяется видимость участков линии пересечения?

## **Заключение**

Начертательная геометрия является фундаментом для изучения и освоения многих инженерных и технических дисциплин, учит пространственному мышлению и конструктивному видению формы предметов.

Знания и навыки, полученные при изучении курса начертательной геометрии, позволяют решать широкий круг практических задач, связанных с построением чертежей, разработкой конструкторской документации, проектированием и моделированием пространственных объектов.

Основные понятия и методы начертательной геометрии - проекции, сечения, развертки - лежат в основе построения чертежей любых пространственных форм и являются необходимыми для изучения специальных технических дисциплин. Рассмотренные методики и графические приемы способствуют развитию навыков чтения чертежей и развитию пространственного мышления.

Эти знания помогут в дальнейшей практической работе инженеров, техников, дизайнеров и архитекторов.

## Список используемых источников

1. Начертательная геометрия и инженерная графика : учеб. пособие / Е. Н. Шуранова, Л. В. Дмитриенко. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2017. – 148 с.
2. Начертательная геометрия: методические указания для студентов заочной формы обучения /составители: В.Н. Шепелева, Л.Л. Карманова, А.Л. Решетов, Т.Ю. Попцова – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. – 89 с.
3. Начертательная геометрия. Курс лекций для студентов ТПУ всех специальностей / составители доц., канд. техн. наук Г. Ф. Винокурова доц. Б. Л. Степанов- Томск: Изд-во ТПУ, 2009.- 65 с.
4. Инженерная и компьютерная графика AutoCAD/ Ютуб канал.- Режим доступа: [https://www.youtube.com/@Umid\\_Takhiroviich](https://www.youtube.com/@Umid_Takhiroviich)
5. Инженерная графика (Евгения Стоянова)/ Ютуб канал.- Режим доступа: <https://www.youtube.com/@Evgeniya8448>
6. ГОСТ 2.302-68 Единая система конструкторской документации. Масштабы
7. ГОСТ 2.303-68 Единая система конструкторской документации. Линии
8. ГОСТ 2.304-81 Единая система конструкторской документации. Шрифты чертежные

## Приложение А

### Принятые обозначения и знаки геометрических операций

<p>A, B, C, D, E, F... 1, 2, 3, ...</p>	<p>Точки пространства обозначаются прописными буквами латинского алфавита, а также арабскими цифрами</p>
<p>a, b, c, d, e, f, q, t...</p>	<p>Линии (прямые, кривые) обозначаются строчными буквами латинского алфавита</p>
<p><math>\Sigma</math> (сигма); <math>\Delta</math> (дельта); <math>\Psi</math> (пси); <math>\Gamma</math> (гамма); <math>T</math> (тау); <math>\Theta</math> (тета); <math>\Omega</math> (омега)</p>	<p>Плоскости пространства, поверхности обозначаются прописными буквами греческого алфавита</p>
<p><math>\Pi</math> (пи) H, V, W</p>	<p>Плоскости проекций: <math>H, \Pi_1</math>- горизонтальная плоскость проекций, <math>V, \Pi_2</math> - фронтальная плоскость проекций, <math>W, \Pi_3</math>- профильная плоскость проекций, <math>\Pi_4, \Pi_5</math>...дополнительные плоскости проекций</p>
<p><math>\sphericalangle</math></p>	<p>Угол: <math>\sphericalangle ABC, \sphericalangle \phi^\circ, \sphericalangle B</math>, или <math>\sphericalangle \Sigma I \Delta</math> (двугранный угол при ребре l)</p>
<p><math>A_1, A_2, A_3</math> <math>b_1, b_2, b_3</math> <math>\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3</math></p>	<p>Проекции точек, прямых (линий) и плоскостей (поверхностей) обозначаются теми же буквами, что и оригиналы, только с индексами соответствующих плоскостей проекций</p>
<p>(AB)</p>	<p>Прямая, проходящая через точки A и B, [AB]- отрезок прямой</p>
<p><math>\Sigma(ABC)</math></p>	<p>Плоскость, заданная точками A, B, C</p>
<p><math>\Delta(l \cap t)</math></p>	<p>Плоскость, заданная пересекающимися прямыми l и t</p>
<p><math>\Omega(\alpha \parallel b)</math></p>	<p>Плоскость, заданная параллельными прямыми a и b</p>
<p><math>\Theta(A, a)</math></p>	<p>Плоскость, заданная точкой A и прямой a</p>
<p><math>\Gamma(\Gamma_1)</math></p>	<p>Плоскость частного положения, заданная следом <math>\Gamma_1</math></p>
<p><math>\in</math></p>	<p>Принадлежность элемента множеству: <math>A \in l</math> (точка A принадлежит прямой l)</p>
<p><math>\subset</math></p>	<p>Включение подмножества в множество: <math>b \subset \Sigma</math> (прямая b принадлежит плоскости <math>\Sigma</math> или плоскость <math>\Sigma</math> проходит через прямую b)</p>
<p><math>\parallel</math></p>	<p>Параллельность: <math>a \parallel b</math> (прямые a и b параллельны)</p>
<p><math>\perp</math></p>	<p>Перпендикулярность: <math>d \perp \Sigma</math> (прямая d перпендикулярна плоскости <math>\Sigma</math>)</p>
<p><math>\cap</math></p>	<p>Пересечение: <math>\Sigma \cap \Omega</math> (плоскость <math>\Sigma</math> пересекает поверхность <math>\Omega</math>)</p>
<p><math>\equiv</math></p>	<p>Совпадение: <math>(A_1) \equiv B_1</math> (горизонтальные проекции точек A и B совпадают и точка A невидима на <math>\Pi_1</math>)</p>
<p><math>\div</math></p>	<p>Скрещивание: <math>k \div l</math> (прямые скрещиваются)</p>
<p>=</p>	<p>Результат геометрической операции: <math>l \cap \Delta = K</math> (прямая l пересекает плоскость <math>\Delta</math> в точке K)</p>

- $\Rightarrow$  Логическое следствие, означает «если ..., то ...»
- $\rightarrow$   $\Sigma(A, l) \Sigma \rightarrow \Sigma(t \cap l)$  (перезадание плоскости  $\Sigma$ , заданной точкой  $A$  и прямой  $l$ , двумя пересекающимися прямыми  $t$  и  $l$ )
- $\wedge$  Знак соответствует союзу «и»
- $\vee$  Знак соответствует союзу «или»
- $\perp$  Прямой угол

"ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ  
ҰЛТТЫҚ МЕМЛЕКЕТТІК КІТАП ПАЛАТАСЫ"

ХАЛЫҚАРАЛЫҚ СТАНДАРТТЫҚ КІТАП НОМЕРІ  
ISBN  
ЭМБЕБАЛ ОҢДЫҚ ЖІКТЕУ,  
КІТАПХАНАЛЫҚ-БИБЛИОГРАФИЯЛЫҚ ЖІКТЕУ,  
ШТРИХ - КОД  
БЕРІЛДІ (ТІРКЕЛДІ)

"НАЦИОНАЛЬНАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ КНИЖНАЯ ПАЛАТА  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН"

ПРИСВОЕНЫ (ЗАРЕГИСТРИРОВАНЫ)  
МЕЖДУНАРОДНЫМ СТАНДАРТНЫМ КНИЖНЫМ НОМЕР  
ISBN  
УНИФИЦИРОВАННЫЙ ДЕСЯТИЧНЫЙ КЛАССИФИКАТОР,  
БИБЛИОТЕЧНО-БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ КЛАССИФИКАТОР,  
ШТРИХ-КОД.

ISBN 978-601-356-291-9

