Г.Ж.Берденова, С.Муталип

Аналитикалық геомерия

Қостанай, 2017

Қазақстан Республикасының білім және ғылым министрлігі
А.Байтұрсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университеті
Математика кафедрасы

Г.Ж.Берденова, С.Муталип

Аналитикалық геометрия

Оқу-әдістемелік құрал

Қостанай, 2017

КБЖ 22.151.54
ӘОЖ 514.122 (075.8)
Б 45
Авторлар:
Берденова Гульнар Жалгасовна, математика кафедрасының аға оқытушысы
Мутили Самат, математика кафедрасының аға оқытушысы

Рецензенттер:

Бедыч Татьяна Витальена – кандидат технических наук, зав. кафедрой энергетики и машиностроения, КИнЭУ имени М.Дулатова

Ысмагул Роза Сапабековна – А. Байтурсынов атындағы ҚМУ математика кафедрасының доценті, физико-математикалық ғылымдарының кандидаті
Утемисова Анар Алтаевна – А. Байтурсынов атындағы ҚМУ математика кафедрасының жетекшісі, педагогикалық ғылымдарының кандидаті

Берденова Г.
Б 45 Аналитическалық геомерия: Оқу-әдістемелік құрал.– Костанай: А. Байтурсынова атындағы ҚМУ, 2017. – 224 б.

«Аналитикалық геометрия» оқу-әдістемелік құралда теориялық материялдарға шолу жасалған, оқу программасына сай мысалдар келтіріліп оның шығару жолдары көрсетілген, сонымен қатар өз еркімен шығаруға есептер берілген және өзінің білімін тексеру тест жинағы кіргізілген.

КБЖ 22.151.54
ӘОЖ 514.122 (075.8)
Б 45

А. Байтұрсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университетінің оқу-әдістемелік кеңесінде жариялау үшін мақұлданған және ұсынылған
____.______________ 2017г., протокол №_____.

ISBN 978-601-7933-22-7

Мазмұны

Кіріспе

Оқу-әдістемелік кешенінде оқу программасына сай, «Аналитикалық геометрия» пәні бойынша негізгі теориялық материялдарға шолу жасалған, мысалдар келтіріліп оның шығару жолдары көрсетілген, сонымен қатар өз еркімен шығаруға есептер берілген. 5В060100-Математика мамандығының студенттеріне арналған.

1 тақырып
Координаттар жүйелері. Аналитикалық
геометрияның қарапайым есептері

Дәрстің мақсаты:

1. Түзудегі, жазықтықтағы және кеңістіктегі декарттық координаталар түсінігін беру.
2. Аналитикалық геометрияның қарапайым есептерімен таныстыру.
3. Полярлық, цилиндрлік және сфералық координаталарды қарастыру.

Қарастыруға арналған сұрақтар тізімі:

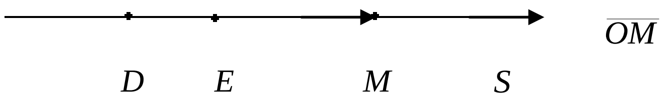
1. Түзудегі декарттық координаталар.
2. Жазықтықтағы декарттық координаталар.
3. Кеңістіктегі декарттық координаталар.
4. Аналитикалық геометрияның қарапайым есептері.
5. Полярлық, цилиндрлік және сфералық координаталар.
6. Екінші және үшінші ретті анықтауыштар.
7. Декарттық тікбұрышты координаталардың түрлендірулері.

1. Түзудегі декарттық координаталар

Оң бағытыа таңдап алынған түзу ось деп аталады

Координаталар бас нүктесі және бірлік масштабы таңдап алынған ось сандық ось деп аталады.

Анықтама: Өзінің ұзындығымен және таңбасымен сипатталатын кесінді бағытталған кесінді деп аталады.



Осьтегі әрбір бағытталған кесіндіге оның сандық сипаттамасы болып табылатын - кесіндінің шамасы сәйкестендіріледі.

Анықтама: АВ бағытталған кесіндінің шамасы деп, АВ бағытталған кесіндінің бағыты осьтің оң бағытымен бірдей болған кездегі АВ кесіндісінің ұзындығына тең оң сан аталады, ал бағытталған кесіндінің бағыты осьтің бағытына қарама-қарсы болса , кесіндінің шамасы теріс санға тең болады.

AB – кесіндінің шамасы

$|AB|$ - кесіндінің ұзындығы

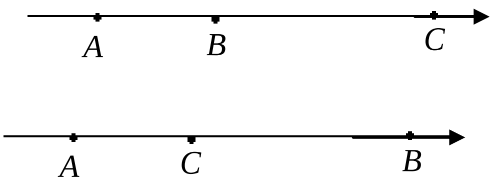
Егер бағытталған кесіндінің басы және ұшы беттессе, онда кесінді нөлдік деп аталады. $\overline{AA}=0$.

Ескерту: 1) нөлдік кесінді бағытты анықтамайды;
2) нөлдік кесіндінің шамасы нөлге тең.

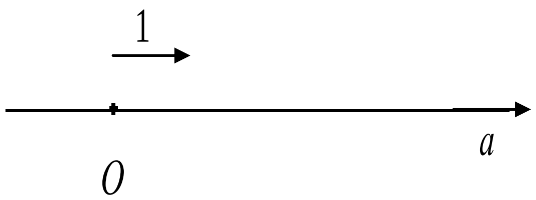
Сөйлем: Берілген осьтегі екі бағытталған кесіндінің тең болуының қажетті және жеткілікті шарты осы кесінділердің шамаларының теңдігі болып табылады.

$\overline{AB}$ және $\overline{BA}$ - бір-біріне қарама-қарсы кесінділер.

Осьтегі *A, B* және *C* нүктелері қалай орналасса да, $\overline{AB}, \overline{BC}$ және $\overline{AC}$ кесінділерінің шамалары негізгі *AB+BC=AC* теңбе-теңдігі арқылы байланысқан.



Кез келген *a* түзуі берілсін. *a* түзуінде анықталған бағыт және *O* координаталар бас нүктесін таңдап аламыз. Бірлік масштабын көрсетеміз.



Түзу бойындағы кез келген М нүктесін қарастырамыз.

Анықтама: Түзудегі М нүктесінің х декарттық координатасы деп, $\overline{OM}$ бағытталған кесіндінің шамасы аталады $\overline{OM}_x = x$ деп белгіленеді. *x=OM*.

M(x) символы- М нүктесінің х коррдинатасы бар дегенді көрсетеді.

$M_1(x_1)$ және $M_2(x_2)$ - *a* түзуіндегі кез келген екі нүкте болсын.

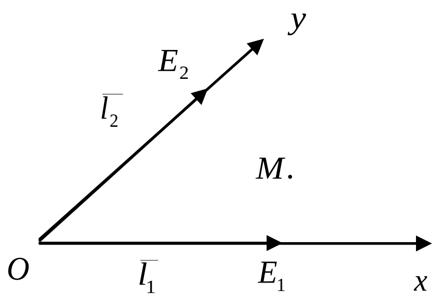
Теорема:_$M_1(x_1)$ және $M_2(x_2)$ нүктелері қандай болса-да, келесі теңдік әрқашан орын алады: $M_1M_2 = x_2 - x_1$.

Осьтегі кесіндінің шамасын табу үшін, оның ұшының координатасынан басының координатасын алу керек.

$|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$ - кесіндінің ұзындығы.

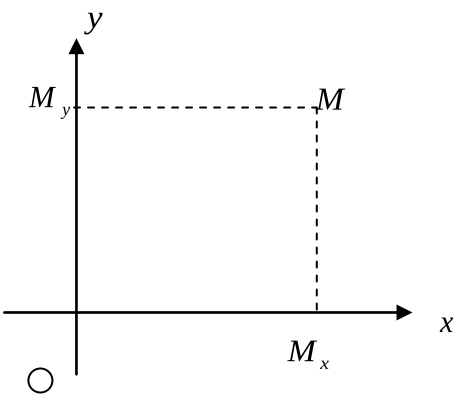
2. Жазықтықтағы декарттық координаталар

Анықтама: Бір жазықтыққа тиісті және бір түзудің бойында жатпайтын *O*, E_1, E_2 нүктелер үштігі аффиндік координаталар жүйесі деп аталады.
Белгіленуі. $R = \{O, E_1, E_2\}$. *O* – координаталар бас нүктесі.



Жазықтықта ортақ бас нүктесі бар және бірдей масштаб бірліктері арқылы анықталатын өзара перпендикуляр екі ось жазықтықтағы тік бұрышты декарттық координаталар жүйесін анықтайды.

Осьтердің қиылысу нүктесі – координаталар бас нүктесі, ал осьтер-координаталық осьтер деп аталады.



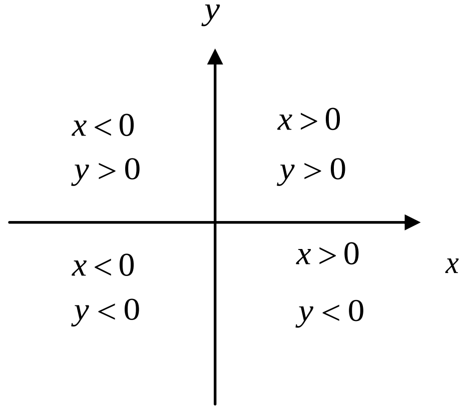
O_x - абсцисса осі.
O_y - ордината осі.
M – жазықтықтағы кез келген нүкте.
M_x, M_y - М нүктесінің сәйкес O_x, O_y осьтеріне проекциялары.

Анықтама: Жазықтықтағы М нүктесінің декарттық координаталары деп сәйкес $O\overline{M}_x$ және $O\overline{M}_y$ бағытталған кесінділерінің шамалары аталады.

$OM_x = x, OM_y = y$

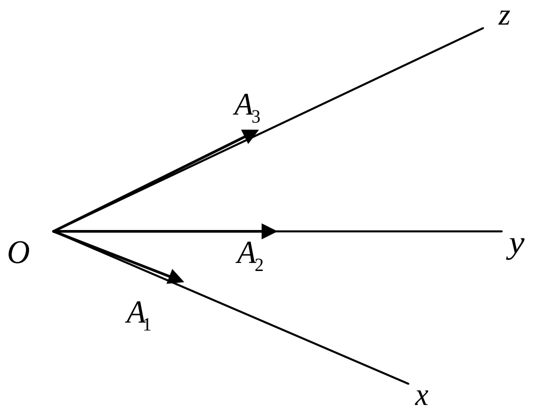
М нүктесінің x және y декарттық координаталары сәйкесінше осы нүктенің абсциссасы және ординатасы деп аталады және M(x,y) деп белгіленеді.

Координаталық осьтер жазықтықты төрт ширекке бөледі. (координаталық ширектер).

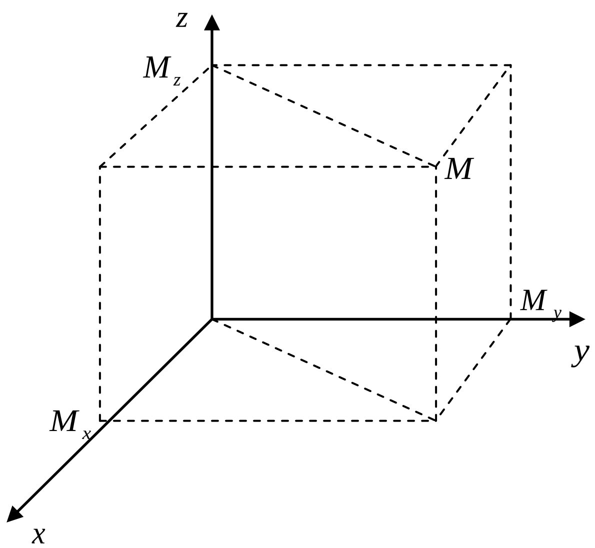


3.Кеңістіктегі декарттық координаталар

Анықтама: Кеңістіктегі аффиндік координаталар жүйесі деп, (ешқандай төртеуі бір жазықтықта жатпайтын) жалпы жағдайдағы реттелген төрттік аталады.



Кеңістікте ортақ бас нүктесі бар және бірдей масштаб бірліктері арқылы анықталатын өзара перпендикуляр үш ось кеңістіктегі тік бұрышты декарттық координаталар жүйесін анықтайды.
O_x осі – абсцисса осі, O_y осі –ордината осі , O_z осі- аппликата осі деп аталады.



M_x, M_y, M_z - М нүктесінің сәйкес O_x, O_y және O_z осьтеріне проекциялары болсын.

Анықтама: Кеңістіктегі М нүктесінің декарттық координаталары деп сәйкес $O\overline{M}_x$,$O\overline{M}_y$ және OM_z бағытталған кесінділерінің шамалары аталады.
$OM_x = x$, $OM_y = y$, $OM_z = z$.
M(x,y,z) деп белгіленеді.
Үш координаталық ось кеңістікті 8 ширекке бөледі.

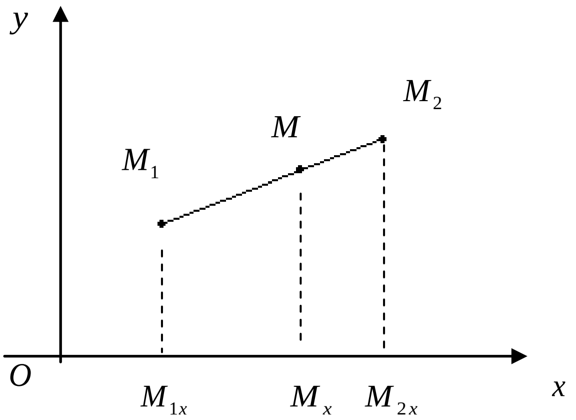
4. Аналитикалық геометрияның қарапайым есептері

I. Екі нүкте ара қашықтығы.

а) сандық осьтегі.

Бізге сандық ось берілсін. $M_1(x_1)$ және $M_2(x_2)$ - осьтегі кез келген нүктелер болсын. $M_1M_2 = x_2 - x_1$ - кесіндінің шамасы. $\rho(M_1M_2) = d = |x_2 - x_1|$ - кесіндінің ұзындығы

б) Жазықтықта тікбұрышты декарттық координаталар жүйесі берілсін(ТБКЖ).



$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$,

$M_{1x}M_{2x} = x_2 - x_1$, $M_{1y}M_{2y} = y_2 - y_1$.

ΔM_1NM_2.

$|MM| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$ - жазықтықтағы екі нүктенің арақашықтығының формуласы.

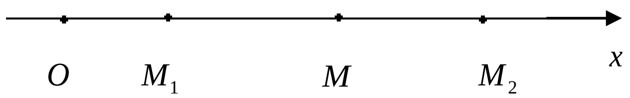
в) кеңістікте:

$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z^2 - z^1)^2}}$ - кеңістіктегі екі нүктенің арақашықтығының формуласы.

II. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу:

а) түзудегі.

Сандық түзу берілсін және оған тиісті үш нүкте берілсін.



Анықтама: $M_1M : MM_2$ кесінділерінің шамаларының қатынасына тең A саны үш нүктенің жай қатынасы деп аталады және $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2} = (M_1M_2M)$ деп белгіленеді, мұндағы M_1M_2 - базистық (негізгі) нүктелер, M – бөлетін нүкте.

Егер: 1) А>0, онда $M \in [M_1M_2]$

2) А<0, онда $M \notin [M_1M_2]$

3) А=1, онда M - M_1M_2 кесіндісінің ортасы.

4) А =-1, онда M – нүктесі табылмайды.

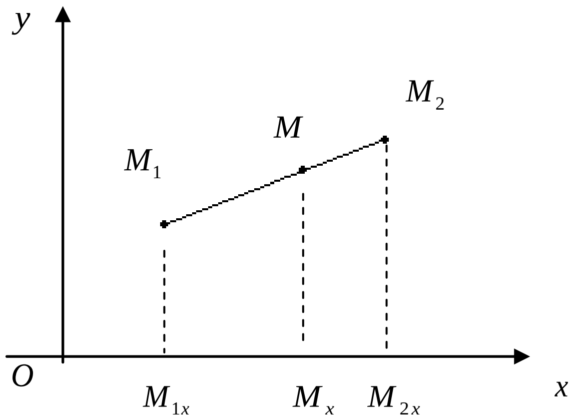
Кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласын табамыз.

$M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M(x)$.

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \quad \lambda(x_2 - x) = x - x_1 \quad x_1 + \lambda x_2 = x + \lambda x \quad x(1+\lambda) = x_1 + \lambda x_2$$

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}}$$

б) жазықтықта ТБКЖ берілсін. $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M(x, y)$.



$\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$ - Фалес теоремасы бойынша.

$$\lambda = \frac{M_{1ч}M_ч}{M_чM_{2ч}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \quad \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{M_{1y}M_y}{M_yM_{2y}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \quad \Rightarrow$$

$\boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{array}}$ - жазықтықтағы кесіндіні берілген қатынаста бөлу формулалары.

Егер $\lambda = 1$, $\boxed{x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}}$ - берілген кесіндінің ортасының формулалары.

в) Кеңістікте: $\boxed{x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}}$, $\boxed{y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}}$, $\boxed{z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}}$- кеңістіктегі кесіндіні берілген қатынаста бөлу формулалары.

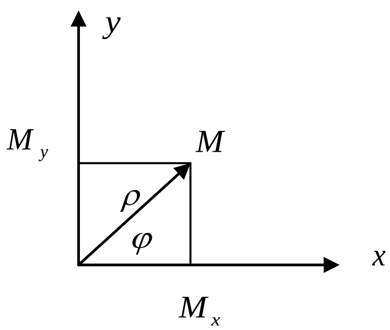
5.Полярлық, цилиндрлік және сфералық координаталар

5.1. Полярлық координаталар

Жазықтықта полярлық координаталар келесі түрде енгізіледі. Жазықтықта қандай-да бір *O* (полюс) нүктесін және одан шығатын *Ox* сәулесін таңдап алайық, масштаб бірлігін көрсетеміз.

Анықтама: М нүктесінің полярлық координаталары деп, ρ және φ екі санды атайды, мұндағы $\rho = OM$ - полярлық радиус, φ - полярлық бұрыш деп аталады. φ- *Ox осін* OM сәулесімен беттескенге дейінгі бұрғаннан шыққан бұрышты атайды.

Белгіленуі $M(\rho,\varphi)$ - ρ және φ полярлық координаталары бар *M* нүктесі. ρ және φ келесі шектеулерде өзгереді: $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$



Тікбұрышты декарттық координаталар жүйесінің бас нүктесі полюсте орналассын, ал *Ox* осі полярлық осьпен беттессін. *M(x,y)* – декарттық координаталар, $M(\rho,\varphi)$ - полярлық координаталар.

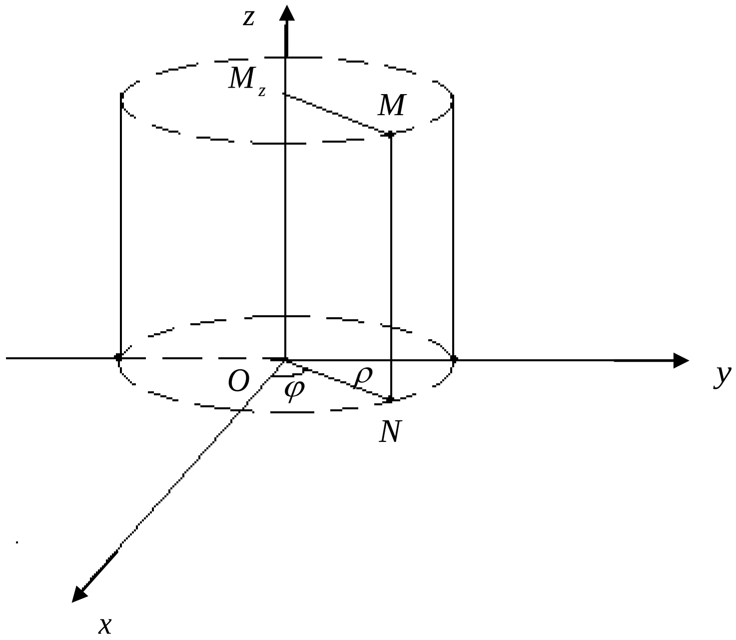
Онда $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ - нүктенің полярлық және декарттық координаталары арасындағы байланыс..$\Rightarrow$ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$.

5.2. Цилиндрлік координаталар

Кеңістіктегі цилиндрлік координаталар келесі түрде енгізіледі.

π жазықтығында қандай-да бір *O* нүктесін және одан шығатын *Ox* сәулесін таңдап алайық. π жазықтығына перпендикуляр, О нүктесі арқылы өтетін *Oz осін қарастырамыз. M* – кеңістіктің кез келген нүктесі, ал N – осы нүктенің π жазықтығына проекциясы болсын.

M_z - М нүктесінің *Oz* осіне проекциясы.



Анықтама: М нүктесінің цилиндрлік координаталары деп $\rho,\ \varphi,\ z$ үш саны аталады, мұндағы $\rho,\ \varphi$ - N нүктесінің π жазықтығындағы О полюске және *Ox* полярлық оське қатысты полярлық координаталары, ал z саны – OM_z кесіндісінің шамасы.
Белгіленуі: $M(\rho, \varphi, z)$.
$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi,\quad z = z$ цилиндрлік және декарттық координаталар арасындағы байланыс.

5.3. Сфералық координаталар

Кеңістікте сфералық координаталарды енгізу үшін ортақ бас нүктесі бар, өзара перпендикуляр *Ox, Oy, Oz* осьтерін қарастырамыз.

M – кеңістіктің кез келген нүктесі, *N* – оның *Oxy* жазықтығына проекциясы болсын. . $\rho = OM$, θ - $\overline{OM}$ бағытталған кесіндінің Oz осімен жасайтын бұрышы болсын.

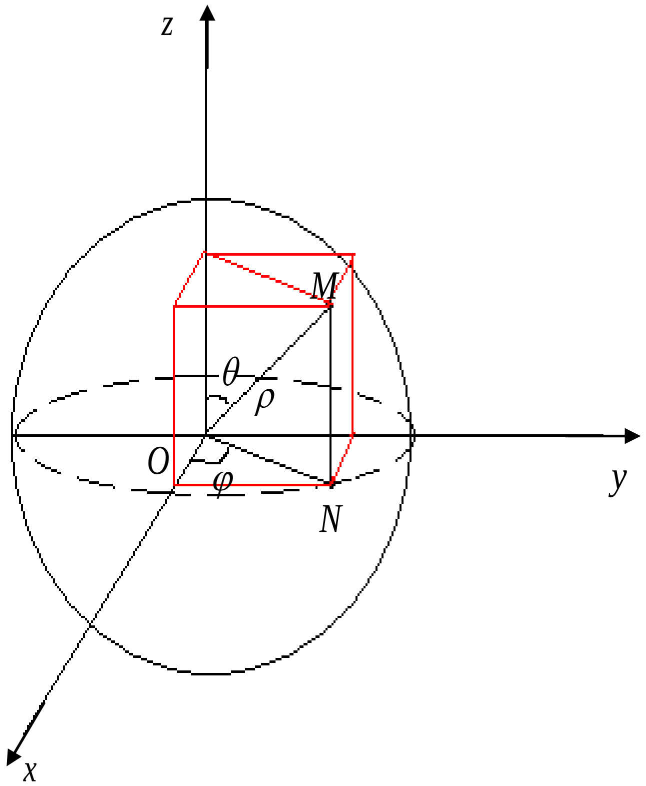
φ - *Ox* осін ON сәулесімен беттескенге дейінгі бұрғаннан шыққан бұрыш. θ және φ ендік және бойлық деп аталады.

М нүктесінің сфералық координаталары деп $\rho,\ \varphi,\ \theta$ сандары аталады. . $0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi$.

$x = \rho\sin\theta\cos\varphi$

$y = \rho\sin\theta\sin\varphi$

$z = \rho\cos\theta$ сфералық және декарттық координаталар арасындағы байланыс.



6. Кіші ретті анықтауыштар

Анықтама: m жол және n бағаннан тұратын келесі түрдегі тіктөртбұрышты сандық кесте

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \mathbf{\ldots\ldots} & \mathbf{b_n} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathbf{a_1} \\ \vdots \\ \mathbf{a_m} \end{array}$$

m x n өлшемді матрица деп аталады және $A_{m\times n}$ деп белгіленеді немесе $A=(\alpha_{ij})=\|\alpha_{ij}\|=[\alpha_{ij}]$.

Егер матрицаның жолдар саны бағандар санына тең болса, онда матрица шаршылы матрица деп аталады. Матрицаның құрамына енетін сандар матрицаның элементтері деп аталады.

Кіші ретті анықтауыштарды қарастырамыз.

A=(a_{11}) 1-ші ретті матрица берілсін.

Анықтама: $|A|=a_{11}$ бірінші ретті анықтауыш деп a_{11} саны аталады.

$$\Delta_1=|A|=a_{11}$$

A=$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}$ - екінші ретті шаршылы матрица берілсін.

Анықтама: А матрицасының элементтерінен құралған екінші ретті анықтауыш деп

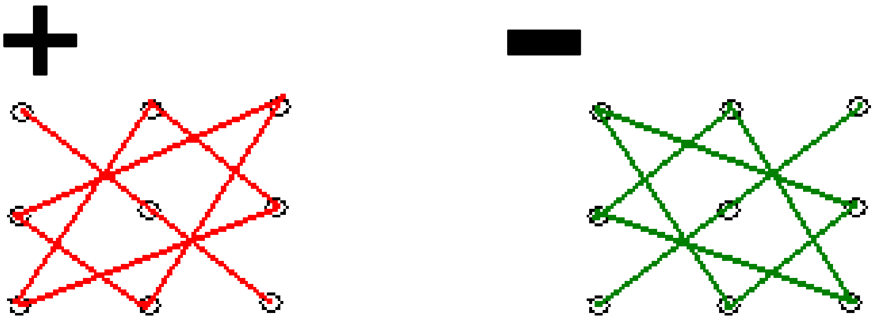
$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ формуласымен есептелетін сан аталады.

A=$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}$ 3-ші ретті матрица берілсін.

Анықтама: А матрицасының элементтерінен құралған үшінші ретті анықтауыш деп, келесі формуламен есептелетін сан аталады:

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

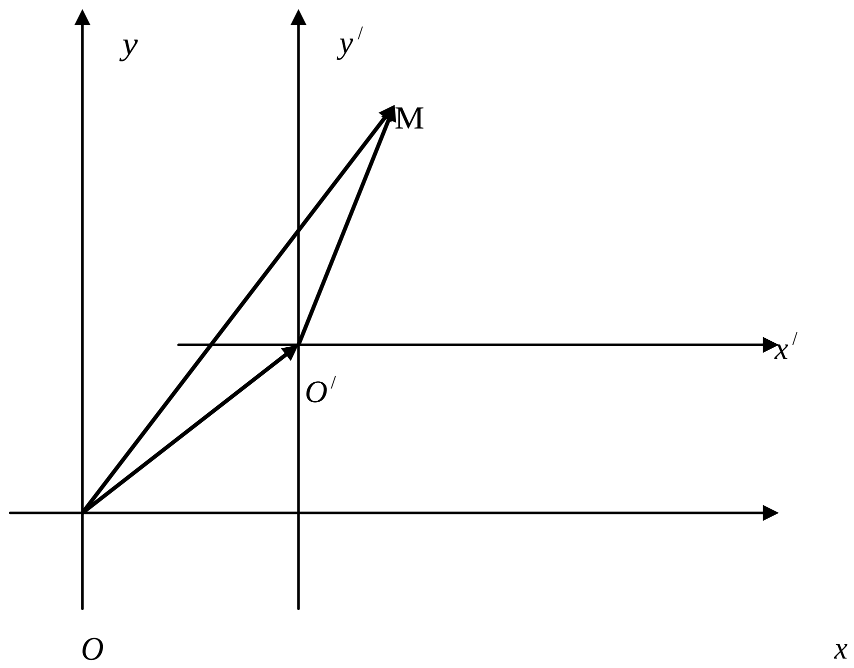
Ереже:



Бұл ереже үшбұрыш ережесі немесе Саррюс ережесі деп аталады.

7. Декарттық тікбұрышты координаталардың түрлендірулері.

Белгілі бір жазықтықта сәйкес остерінің бағыттары бірдей, ал O және O' координаталар бас нүктелері әр түрлі болатын Oxy және $O'x'y'$ тікбұрышты координаталар жүйелері берілсін. Бұнда жаңа деп аталатын $O'x'y'$ кооординат жүйесі, ескі деп аталатын Oxy кординат жүйесінен параллель көшіру арқылы алынады.



Егер $O^{/}$ нүктесінің ескі Oxy жүйесіне қатысты a, b координаталары белгілі болса, онда жаңа координаталар жүйесін ескі жүйеге координаталар жүйесіне қатысты орнын бірмәнді анықтап алуымызға болады.

Жазықтықта M нүктесін қалауымызша бекітіп алайық. Оның ескі және жаңа жүйедегі координаталары сәйкесінше x, y және $x^{/}, y^{/}$ болсын. Онда $\overline{OO^{/}} = (a,b)$, $\overline{OM} = (x, y)$ және $\overline{O^{/}M} = (x^{/}, y^{/})$ формулаларынан $\overline{OM} = \overline{OO^{/}} + \overline{O^{/}M}$ теңдігін аламыз. Координаталық түрде бұл теңдікті былай жазуға болады

$$x = x^{/} + a, \qquad y = y^{/} + b.$$

Осы формула M нүктесінің ескі координаталарын жаңа координаталар арқылы бейнелейді. Бұдан

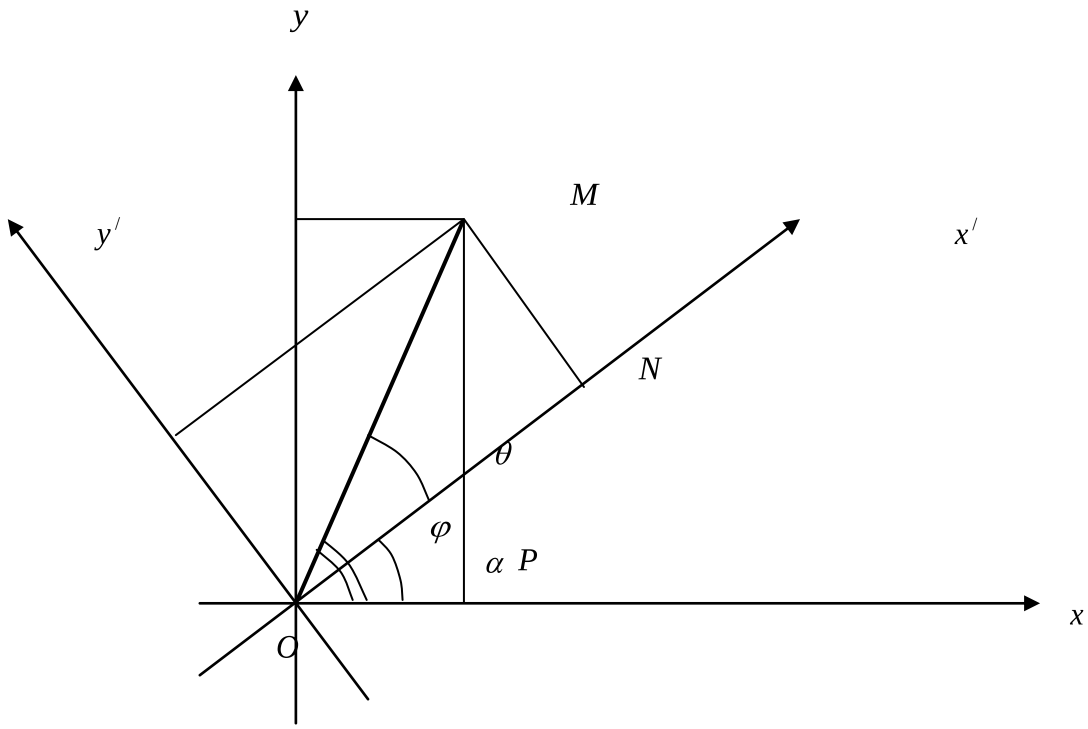
$$x^{/} = x - a, \qquad y^{/} = y - b.$$

Бұл формулалар координаттық осьтерді параллель көшіргенде жазықтық бойынан еркімізше алынған M нүктесінің координаталарының түрлендіруі болып табылады.

Енді координаталар жүйесін бұрғандағы координаталар түрлендіруін қарастырайық.

Бір нүктеден шығатын, бірақ бағыттары әртүрлі болатын Oxy және $Ox^{/}y^{/}$ тікбұрышты координаталар жүйелері берілсін. Ox осі $Ox^{/}$ осімен α бұрышын жасасын. Онда $Ox^{/}y^{/}$ жаңа координаталар жүйесі ескі Oxy координаталық жүйесінен координаттық осьтерді ортақ бас нүктеден α бұрышына бұру арқылы алынады деп атаймыз.

Жазықтықтан қалауымызша алынған M-нүктесі үшін x, y пен $x^{/}, y^{/}$ оның сәйкесінше- ескі және жаңа координаталық жүйедегі координаталары болсын.



M нүктесін координаталар осьтеріне проекциялап, $\overline{OM}$ радиус-векторын жүргізейік. $r = |\,OM\,|$, $\angle\left(\overline{OM}, Ox\right) = \varphi$, $\angle\left(\overline{OM}, Ox'\right) = \theta$ белгілеулерің енгізейік. OMP және OMN үшбұрыштарынан сәйкесінше

$$x = r\cos\varphi; \qquad y = r\sin\varphi;$$
$$x' = r\cos\theta; \qquad y' = r\sin\theta.$$

теңдіктерін аламыз. $\varphi = \alpha + \theta$ болғандықтан

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta+\alpha) = r(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) = x'\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y &= r\sin(\theta+\alpha) = r(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}.$$

Сонымен,

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

жүйесіне келдік.

Бұл формулалар M нүктесінің ескі координаталарын жаңа координаталар арқылы өрнектеу формуласы болады.

Ал Oxy координаталар жүйесі өз алдына $Ox'y'$ жүйесінен остерін $-\alpha$ бұрышына бұру арқылы алуға болғандықтан, соңғы формулада координаталардың белгілерін ауыстырып, α -ны $-\alpha$ -ға алмастырсақ

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

формуласына келеміз.

Бұл формулалар M нүктесінің жаңа координаталарын ескі координаталар арқылы белгілеу деп аталады.

Сонымен, соңғы алынған теңдіктер координаталар осьтерін бұрғандағы жазықтық бойындағы кез келген M нүктесінің координаталарының түрлендіру формулалары болып табылады.

Координаталар жүйесінің параллель көшіріп және α бұрышына бұрғандағы кез келген M нүктесінің координаталарының түрлендірулерін төмендегідей жазуға болады

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b \end{cases}.$$

Бұл формулалар кез келген M нүктесінің ескі координаталарын жаңа координаталар арқылы белгілеу болып табылады. Осында M нүктесінің жаңа координаталарын ескі координаталар арқылы өрнектеуге болады.

М ы с а л д а р.

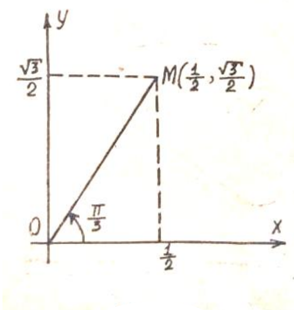
1. Тік бұоышты декарт координат жүйесінде берілген М$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ нүктенің поляр координат жу»есіндегі координаттарын анықта.

Ш е ш і м і. Мына $x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$ немесе $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, формуладағы $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, сонда $\rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$.

tg $\varphi = \frac{y}{x}$ немесе φ = arctg $\frac{y}{x}$. формуладан: tg $\varphi = \frac{4}{3}\sqrt{3}$, яғни $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Сонымен M нүктенің поляр координат жүйесіндегі координаттары $M\,(1, \frac{\pi}{3})$ болады.

2. Поляр координат жүйесіндегі берілген $M\,(-2, \frac{4\pi}{3})$ нүктенің декарт коордтнат жүйесіндегі координаттарын анықта.

Ш е ш і м і. Ол үшін $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \cdot \sin \varphi$ формуласын пайдаланамыз:



мұндағы $\rho = +2$, $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. Онда, $x = +2 \cos \frac{4\pi}{3} = +2\,(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3}$.

Сонымен, берілген нүктенің декарт координат жүйесіндегі координаттары $x = 1$, $y = -\sqrt{3}$ яғни $M\ (-1, -\sqrt{3}\ )$.

3. Декарт координат жүйесіндегі $y^2(2a-x) - x^3 = 0$ циссоида теңдеуінің поляр координат жүйесендегі теңдеуін анықта.

Ш е ш і м і. Ол үшін декарт және поляр координат жүйерлері арасындағы байланысты көрсететін (1.2) формуланы пайдаланамыз. $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ формуланы берілген теңдеуге қойып, одан ρ-ны анықтайық

$$\rho^2 \sin^2\varphi(2a - \rho \cos \varphi) - \rho^3\cos^3\varphi = 0$$

$$2a\sin^2\varphi - \rho \sin^2\varphi \cdot \cos \varphi - \rho \cos^3 \varphi = 0$$

$$2a\sin^2\varphi - \rho \cos \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = 0.$$

Осыдан,

$$\rho = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \text{ немесе } \rho = 2a \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varphi.$$

Соңғы теңдеу іздестіріп отырған циссоида теңдеуі.

4. Поляр координат жүйесендегі $\rho = 2r(1+\cos \varphi)$ кардиоида теңдеуінің декарт координат жүйесіндегі теңдеуін анықта.

Ш е ш і м і. Алдымен (1.2) мен (1.3) формулаларын пайдаланып, кардиоида теңдеуіндегі ρ мен cos φ-ді анықтайық:

$$\rho = \sqrt{x^3 + y^2},\ \cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Енді ρ мен cos φ-ді берілген кардиоида теңдеуіне қойып, оны x пен y айнымалылары арқылы өрнектелген теңдеуі анықтасақ жеткілікті:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2r\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

$$x^2 + y^2 = 2r\left(\sqrt{x^2 + y^2} + x\right),\ x^2 + y^2 - 2rx = 2r\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Осыдан,

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = 4r^2 (x^2 + y^2).$$

Соңғы теңдеу берілген кардиоида теңдеуінің декарт координат жүйесіндегі теңдеуі.

5. Центрі M (0;4), ал радиусы 4-ке тең шеңбердің поляр теңдеуін анықта.

Ш е ш і м і. Ол үшін шеңбердің центрі M (a,b) – нүкте, ал радиусы R-ге тең шеңбердің жалпы теңдеуін пайдаланамыз:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

Мұндағы a = 0, b = 4, R = 4. Сонда, $x^2+(y-4)^2 = 16$ теңдеуі іздестіріп отырған теңдеудің декарт координат жүйесіндегі теңдеуі.

Енді $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$-ді шеңбердің теңдеуіне қояйық

$$\rho^2\cos^2\varphi + (\rho \sin \varphi - 4)^2 = 16$$

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2 \varphi - 8 \rho \sin \varphi + 16 = 16.$$

Осыдан,

$$\rho = 8 \sin \varphi.$$

Соңғы теңдеу іздестіріп отырған шеңбердің поляр теңдеуі.

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар:

1. Түзуде декарттық координаталар қалай анықталады?
2. Бағытталған кесінді дегеніміз не?
3. Жазықтықта декарттық координаталар қалай анықталады?

4. Кеңістікте декарттық координаталар қалай анықталады?
5. Түзудегі, жазықтықтағы және кеңістіктегі екі нүктенің арақашықтығы қалай анықталады?
6. Түзудегі, жазықтықтағы және кеңістіктегі кесіндіні берілген қатынаста бөлу формулаларын жаз.
7. Нүктенің полярлық координаталары қалай анықталады?
8. Нүктенің полярлық және декарттық координаталары арасында қандай байланыс бар?
9. Нүктенің цилиндрлік координаталары қалай анықталады?
10. Цилиндрлік және декарттық координаталар арасындағы байланыс қалай анықталады?
11. Нүктенің сфералық координаталары қалай анықталады?
12. Сфералық және декарттық координаталар арасындағы байланысты көрсет.
13. Екінші және үшінші ретті анықтауыштар қалай есептеледі?

Жаттығулар:

1.1 $A(1; 6; -3)$, $B(-5; 3; -5)$, $C(3; -1; 1)$, $ABCD$ параллелограммының D төбесінің координаларын тап.

1.2 Егер $A(4; -2; 2)$, $B(6; 1; -4)$, $C(0; -1; -7)$, $D(-2; -4; -1)$, $ABCD$ — тік төртбұрыш екенін дәлелдендер.

1.3 Егер $A(-3; -4; 5)$, $B(-2; 0; -3)$, $C(2; 7; 1)$, $D(1; 3; 9)$ болса, $ABCD$ — квадрат екенін дәлелде.

1.4 Егер $A(9; 2; 8)$, $B(5; 3; -2)$, $C(-3; -4; -4)$, $D(1; -5; 6)$ болса, $ABCD$ — ромб екенін дәледендер.

2-5 тақырып.

Векторлар

Дәрістің мақсаты:

1. Векторлар теориясының негізгі түсініктерін енгізу.

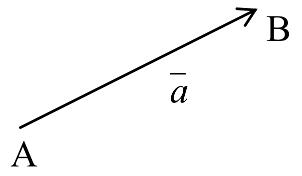
2. Теориялық мағлұматтарды есептерді шығарғанда қолдану дағдысын қалыптастыру.

Қарастыратын сұрақтар тізімі:

1. Вектор түсінігі және оларға қолданылатын амалдар.
2. Векторлардың сызықты тәуелділігі.
3. Вектордың оске проекциясы.
4. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі.
5. Векторлардың векторлық көбейтіндісі
6. Векторлардың аралас көбейтіндісі

1. Вектор түсінігі және векторларға қоладантын сызықты амалдар

Анықтама: Геометриялық вектор немесе қарапайым вектор деп бағытталған кесіндіні айтамыз.
Белгіленуі $\overline{AB}$, мұндағы A басы, B вектордың ұшы.



Анықтама: $\vec{a}$ векторының ұзындығына тең сан оның модулі деп аталады және $\left|\overline{a}\right|$ -символымен белгіленеді.

Анықтама: Егер $\left|\overline{a}\right| = 1$ болса, онда ол бірлік вектор деп аталады.

Анықтама: $\vec{a}$ векторымен бағыттас бірлік вектор осы вектордың орты деп аталады және $\overline{a}^{\,0}$ символымен белгіленеді. $\overline{a}_0^{\,0} = \dfrac{\overline{a}}{\left|a\right|}$.

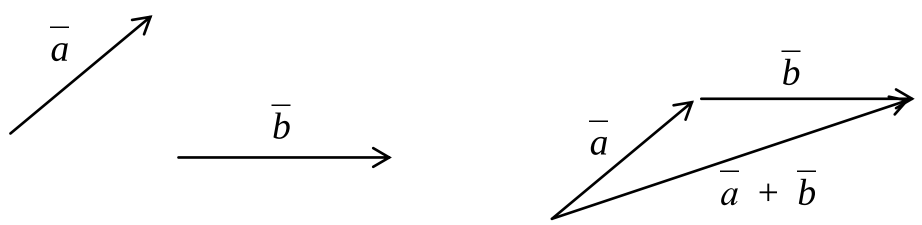
Анықтама: Егер вектордың басы мен ұшы беттессе онда ол вектор нөлдік вектор деп аталады.Нөлдік вектордың анықталған бағыты болмайды және оның ұзындығы нөлге тең.

Анықтама: Параллель түзулердің бойында немесе бір түзудің бойында жатқан векторлар коллинеарлы векторлар деп аталады.

Анықтама: Егер екі вектордың ұзындықтары тең және бағыттас болса онда ол векторлар өзара тең деп аталады. Барлық нөлдік векторлар тең деп есептеледі.

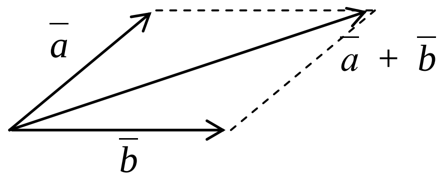
Сызықтық операциялар деп векторлардың қосындысын және санға көбейту амалдары аталады.

Анықтама: $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының қосындысы деп, үшінші бір $\overline{a}+\overline{b}$ векторы аталады. Бұл вектордың басы $\vec{a}$ векторының басымен ал соңы $\vec{b}$ векторының соңымен беттеседі.



«үшбұрыш ережесі»

Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының бастарын беттестіріп, оны паралелограммға дейін толықтырса, онда олардың $\overline{a}+\overline{b}$ қосындысы осы векторлардың ортақ басынан шығатын параллелограммның диагоналына тең.

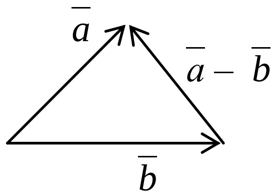


«Параллелограмм ережесі»

Векторлардың қосындысының қасиеттері:

1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ (ауыстырымдылық қасиет, коммутативтілік);
2. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ (үлестірімділік қасиет, ассоциативтілік);
3. Кез келген $\vec{a}$ векторы үшін $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$ орындалатындай $\vec{0}$ табылады;
4. Әрбір $\vec{a}$ векторы үшін $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=0$ орындалатындай қарама-қарсы $-\vec{a}$ векторы табылады.

Анықтама: $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының $\overline{a}-\overline{b}$ айырмасы деп $\vec{b}$ векторымен қосындысы $\vec{a}$ векторы болатындай $\vec{c}$ векторы аталады.



$\overline{a}-\overline{b}$ **айырымын құру ережесі**

Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының басы ортақ нүктеге келтірілсе, онда олардың $\overline{a}-\overline{b}$ айырымы $\vec{b}$ (азайғыш) векторының соңынан $\vec{a}$ (азайтқыш) векторының соңына бағытталады.

Анықтама: $\vec{a}$ векторының нақты α санына көбейтіндісі деп модулі $\vec{a}$ векторының модулін α санының модулінің көбейтіндісіне тең вектор аталады. $\left(\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\alpha\right|\right)$. Ол $\vec{a}$ векторына параллель немесе бір түзудің бойында жатады. Егер $\alpha>0$ болса, онда ол $\vec{a}$ векторымен бағыттас ал егер $\alpha<0$ болса, онда $\vec{a}$ векторына қарама-қарсы бағытталады..

Векторды санға көбейту амалының геометриялық мағынасы: $\vec{a}$ векторын α санына көбейткенде вектор α есе «созылады».
$\alpha>1, \qquad 0<\alpha<1.$

Қасиеттері:

5. $\alpha(\overline{a}+\overline{b})=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$ (векторлардың қосындысына қатысты сандық көбейткіштің үлестірімділік қасиеті);

6. $(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$ (сандардың қосындысына қатысты векторлық көбейткіштің үлестірімділік қасиеті);

7. $\alpha(\beta\overline{a})=(\alpha\beta)\overline{a}$ (сандық көбейткішке қатысты терімділік қасиет).

2. Векторлардың сызықты тәуелділігі

1 Теорема *:* Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар және $\overline{a}\neq\overline{0}$ болса, онда $\overline{b}=\alpha\overline{a}$ орындалатындай жалғыз α саны табылады.

2 Теорема: Егер $\vec{a}$, $\overline{b}$ және $\overline{c}$ векторлары компланар, ал $\overline{a}$, $\overline{b}$ коллениарлы емес болса, онда $\overline{c}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}$ орындалатындай жалғыз α және β сандары табылады.

Анықтама: Егер $\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+...+\alpha_n\overline{a_n}=0$ (1) үшін , $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ сандарының арасынан кем дегенде біреуі нөлден өзгеше болатындай сандар табылса, онда $a_1, a_2, \cdots a_n$ векторлар жүйесі сызықты тәуелді деп аталады. Егер (1) теңдігі $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$ үшін тура болса, онда $a_1, a_2, \cdots a_n$ векторлар жүйесі сызықты тәуелсіз деп аталады.

3 Теорема: a, $\overline{b}$ векторлар жүйесі осы векторлар коллинеар болғанда ғана, тек сонда ғана сызықты тәуелді болады.

Анықтама: Егер V жиынында векторларды қосу және векторды санға көбейту амалдары анықталған болса, V жиыны векторлық кеңістік деп аталады.

Анықтама: Векторлың кеңістіктің базисі деп, анықталған ретте берілген және келесі шарттарды қанағаттандыратын векторлар жүйесі аталады:

а) жүйе сызықты тәуелсіз;

б) кеңістіктің кез келген векторы берілген векторлар жүйесінің сызықты тіркесі болып табылады.

3. Вектордың оське проекциясы

Анықтама: $\overline{AB}$ векторының u осіне проекциясы деп u осіндегі $\overline{A_1B_1}$ кесіндісінің шамасына тең санды атаймыз, мұндағы A_1 - A нүктесінің , B_1 - B нүктесінің u осіне түскен проекциялары. Белгіленуі $np_u\overline{AB}$.

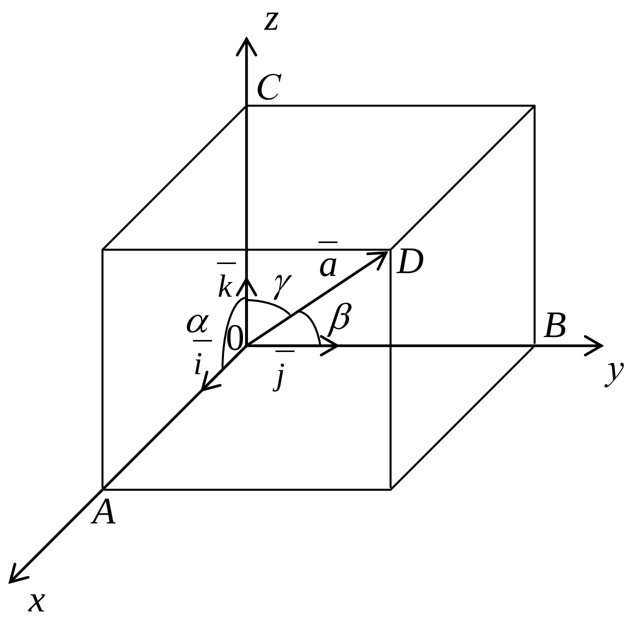
Теорема: $\vec{a}$ векторының u осіне түскен проекциясы $\vec{a}$ векторының ұзындығы мен осы вектордың u осімен жасайтын сүйір бұрышының косинусының көбейтіндісіне тең.

$$np_u\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cos\varphi. \quad (2)$$

Анықтама: Егер $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ векторлар үштігі келесі шарттарды қанағаттандырса, онда бұл үштік координаталық базис деп аталады.:

1. $\overline{i}$ векторы Ox осінде, $\overline{j}$ – Oy осінде, $\overline{k}$ – Oz осінде жатса.

2. $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$ векторларының әрқайсысы өз осінде оң жаққа қарай бағытталған.
3. $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$ – бірлік векторлар, яғни $\left|\overline{i}\right| = 1,\quad \left|\overline{j}\right| = 1,\quad \left|\overline{k}\right| = 1.$



$\vec{a}$ - векторы қандай болса да, ол әр уақытта $i,\ \overline{j},\ \overline{k}$ базисі бойынша жіктеледі, яғни $\overline{a} = X\,\overline{i} + Y\,\overline{j} + Z\,\overline{k}$ түрінде келтіріледі.
Осы жіктелудің коэффициенттері $\vec{a}$ векторының координататалары болып табылады.
Символикалық түрде $\overline{a} = \{X, Y, Z\}$ белгіленеді.
$OA = X$; $\quad OB = Y$; $\quad OC = Z$.
OD –параллелепипедтің диагоналы.

$$OD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2. \quad \left|\overline{a}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad (3)$$

α, β, γ - $\vec{a}$ векторының OX, OY, OZ осьтерімен жасайтын бұрыштары.
Онда $X = \left|\overline{a}\right|\cos\alpha$, $Y = \left|\overline{a}\right|\cos\beta$, $Z = \left|\overline{a}\right|\cos\gamma$

cosα, cosβ, cosγ - $\vec{a}$ векторының бағыттаушы косинустары деп аталады.
(3) формуласынан $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ екендігі шығады.
Кез келген вектордың бағыттаушы косинустарының квадраттарының қосындысы бірге тең.
$\overline{a}$ векторы - оның ұзындығы және үш бағыттаушы косинустары арқылы бірмәнді анықталады.
Егер $\overline{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ және $\overline{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ болса, онда $\overline{a} \pm \overline{b} = \{X_1 \pm X_2,\ Y_1 \pm Y_2,\ Z_1 \pm Z_2\}$,

$$\alpha\,\overline{a} = \{\alpha\,X_1,\ \alpha\,Y_1,\ \alpha\,Z_1\}.$$

Екі вектордың коллинеар болуының белгісі - олардың координаталарының пропорционалдығы.

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1}.$$

4. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі

Анықтама: Екі вектордың скалярлық көбейтіндісі деп, олардың ұзындықтарын осы векторлар арасындағы бұрыштың косинусына көбейткеннен шыққан сан аталады.

$$\overline{a}\,\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\varphi$$

Скалярлық көбейтіндінің геометриялық қасиеттері

1 Теормема: Екі вектордың ортогоналдылығының қажетті және жеткілікті шарты - олардың скалярлық көбейтіндісінің нөлге теңдігі.

2 Теорема: Егер $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлары арасындағы бұрыш сүйір (доғал) болса, онда олардың скалярлық көбетіндісі оң (теріс)болады.

Скалярлық көбейтіндінің алгебралық қасиеттері.

1. $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{b}\,\overline{a}$ (коммутативтілік)

2. $\alpha\left(\overline{a}\overline{b}\right) = \left(\alpha\,\overline{a}\right)\overline{b}$ (сандық көбейткіштің ассоциативтілігі)

3. $\left(\overline{a} + \overline{b}\right)\overline{c} = \overline{a}\,\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c}$ (дистрибутивтілік)

4. Егер $\overline{a}$ векторы нолдік болмаса $\overline{a}\,\overline{a} > 0$.

егер $\overline{a}$ векторы нолдік болса $\overline{a}\,\overline{a} = 0$,

$\overline{a}^2 = \left|\overline{a}\right|^2$.

Скалярлық көбейтіндіні декарттық координатада өрнектеу

Теорема: Егер $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлары өздерінің декарттық координаталарымен берілсе, онда скалярлық көбейтінді келесі түрде болады $\overline{a}\,\overline{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

1 салдар : Келесі теңдік екі вектордың ортогоналдылығының қажетті және жеткілікті шарты болып табылады: $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$

2салдар : $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторларының арасындағы бұрыш келесі формуламен анықталады: $\cos\varphi = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

5. Векторлардың векторлық көбейтіндісі

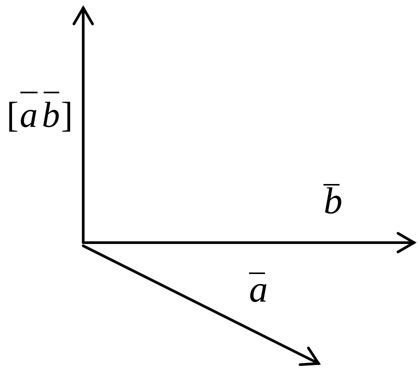
Анықтама: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ векторлары компланар емес болсын, онда векторлардың векторлық көбейтіндісі деп, $[\overline{a}\,\overline{b}]$ символымен белгіленетін және келесі үш шартпен анықталған вектор аталады:

1. $[\overline{a}\,\overline{b}]$ векторлық көбейтіндінің модулі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының модулін олардың арасындағы бұрыштың синусына көбейткенге тең

$\left|[\overline{a}\,\overline{b}]\right| = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{в}\right|\sin\varphi$.

2. $[\overline{a}\,\overline{b}]$ векторы $\overline{a}$ және $\vec{b}$ векторларының әрқайсысына перпендикуляр.

3. Векторлық көбейтіндінің бағыты оң қол ережесіне сәйкес, яғни: егер $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $[\overline{a}\,\overline{b}]$ векторларының басы ортақ нүктеге келтірілсе, онда $[\overline{a}\,\overline{b}]$ ортаңғы саусақ сияқты, $\vec{a}$ бас бармақ, ал $\vec{b}$ сұқ саусақ сияқты бағытталған.



Векторлық көбейтіндінің геометриялық қасиеттері

1 Теорема: Екі вектордың коллинеарлығының қажетті және жеткілікті шарты олардың векторлық көбейтіндісінің нөлге теңдігі болып табылады.

2 Теорема: Векторлық көбейтіндінің модулі $\vec a$ және $\vec b$ векторларының ортақ басымен келтіріп құрастырылған параллелограммның ауданына тең.

Векторлық көбейтіндінің алгебралық қасиеттері

1. $[\bar a\bar b] = -[\bar b\bar a]$ (антикоммутативтілік)

2. $[(\alpha\bar a)\bar b] = \alpha[\bar a\bar b]$.

3) $[(\bar a + \bar b)\cdot\bar c] = [\bar a\cdot\bar c] + [\bar b\cdot\bar c]$;

4) Кез келген $\bar a$ үшін $[\bar a\,\bar a] = \bar 0$; $\quad |[\bar a\cdot\bar a]| = |\bar a|\cdot|\bar a|\cdot\sin 0^o = 0$

Векторлық көбейтіндіні декарттық координатада өрнектеу

Теорема: Егер $\vec a$ және $\vec b$ векторлары өздерінің декарттық координаталарымен берілсе, яғни $\bar a\{x_1\,y_1\,z_1\}$ және $\bar b\{x_2\,y_2\,z_2\}$ болса, онда векторлық көбейтіндінің координаталары келесі түрде анықталады .

$$[\bar a\bar b] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\bar k$$

$$[\bar a\bar b] = \left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

6. Векторлардың аралас көбейтіндісі

Анықтама: Егер векторлар бір немесе параллель жазықтықтарда жатса, онда олар компланар векторлар деп аталады.

Анықтама: $\vec a$, $\vec b$ және $\vec c$ кез келген үш вектор берілген болсын. Егер $\vec a$ векторы $\vec b$ векторына векторлық түрде көбейтіліп, алынған $[\bar a\bar b]$ векторы $\vec c$

векторына скалярлы көбейтілсе, онда нәтижесінде алынған $[\overline{a}\overline{b}]\overline{c}$ саны $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп аталады..

Векторлық көбейтіндінің геометриялық мағынасы

Теорема: $[\overline{a}\overline{b}]\overline{c}$ аралас көбейтінді $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ ортақ басына келтірілген векторлардан құрастырылған параллелепипедтің көлеміне тең, егер $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ үштігі оң болса онда нәтиже оң таңбамен, кері жағдайда теріс таңбамен алынады. Егер $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары компланар болса, онда $[\overline{a}\overline{b}]\overline{c}$ мәні нолге тең.

1 салдар: Үш вектордың компланар болуының қажетті және жеткілікті шарты- олардың аралас көбейтіндісінің нөлге теңдігі.

2 салдар: Екі векторы бірдей болатын, үш вектордың аралас көбейтіндісі нөлге тең.

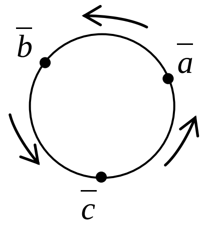
Аралас көбейтіндінің қасиеттері:

1. Аралас көбейтінді көбейткіштерді топтастырудан тәуелсіз:

$$[\overline{a}\overline{b}]\overline{c} = \overline{a}[\overline{b}\overline{c}] \ .$$

2. Аралас көбейтінді көбейткіштердің айналмалы орын ауыстаруларынан өзгермейді:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a} = \overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b} = -\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c} = -\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b} = -\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a} \, .$$



3. Екі вектордың қосындысының басқа екі векторға аралас көбейтіндісі әр вектордың қосылғыш векторға аралас көбейтінділерінің қосындысына тең:

$$(\overline{a}_1 + \overline{a}_2)\overline{b}\,\overline{c} = \overline{a}_1\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}_2\overline{b}\,\overline{c} \, .$$

4. Аралас көбейтіндінің скалярлық көбейткішін таңбаның алдына шығаруға болады:

$$(\lambda\overline{a})\overline{b}\,\overline{c} = \lambda(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}) \, .$$

Аралас көбейтіндіні декарттық координатада өрнектеу

Теорема: Егер $\overline{a}$, $\overline{b}$ және $\overline{c}$ векторлары өздерінің тік бұрышты декарттық координаталарымен берілсе, яғни $\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\overline{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$болса, онда олардың аралас көбейтіндісі $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ жолдары осы векторлардың координаталарынан құралған анықтауышқа тең.

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \, .$$

Салдар: Үш вектордың компланарлық шартының қажетті және жеткілікті шарты $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\bar{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$ жолдары осы векторлардың координаталарынан құралған анықтауыштың нолге теңдігі болып табылады.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Теорема: Үш вектор компланар болуы үшін олардың аралас көбейтіндісі нолге тең болуы қажетті және жеткілікті.

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар:

1. Вектор дегеніміз не?
2. Вектордың модулі деп нені атаймыз?
3. Бірлік вектор дегеніміз не?
4. $\vec{a}$ немесе $\vec{a}^{\,0}$ векторының орты дегеніміз не?
5. Нөлдік вектор деп қандай вектор аталады?
6. Коллинеар деп қандай векторларды айтамыз?
7. Компланар деп қандай векторларды айтамыз?
8. Қандай векторлар тең деп аталады?
9. $\vec{a}+\vec{b}$ векторлардың қосындысын табудың үшбұрыш ережесі?
10. $\vec{a}+\vec{b}$ векторлардың қосындысын табудың параллелограмм ережесі?
11. $\vec{a}-\vec{b}$ векторлардың айырымы дегеніміз не?
12. $\vec{a}-\vec{b}$ айырымын құру ережесі.
13. Векторды санға көбейтудің геометриялық мағынасы.
14. Векторлардың сызықты тәуелділігі.
15. 2 вектордың сызықты тәуелділігінің қажетті және жеткілікті шарты.
16. 3 вектордың сызықты тәуелділігінің қажетті және жеткілікті шарты..
17. Вектордың оське проекциясы дегеніміз не және ол неге тең?
18. Вектордың бағыттаушы косинустары қалай табылады?
19. Бағыттаушы косинустар үшін негізгі теңбе-теңдікті көрсет.
20. Скалярлық көбейтіндінің анықтамасын беріңіз.
21. Екі вектордың ортогоналдылық шартын жаз.
22. Скалярлық көбейтіндінің декарттық координаталардағы мәні.
23. Векторлардың векторлық көбейтіндісі дегеніміз не?
24. Екі вектордың колленеарлығының қажетті және жеткілікті шарты.
25. Векторлық көбейтіндінің геометриялық мағынасы.
26. Векторлық көбейтіндінің декарттық координатамен өрнектелуі.
27. Үш вектордың аралас көбейтіндісінің анықтамасы.
28. Үш вектордың аралас көбейтіндісінің геометриялық мағынасы.
29. Үш вектордың компланарлығының қажетті және жеткілікті шерты.
30. Аралас көбейтіндінің декарттық координатамен өрнектелуі.

Жаттығулар:

A, B және C нүктелері берілген. $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ ортылары бойынша $\vec{a}$ векторын жіктеу. Бағытталған косинустарды және $\vec{a}$ вектор ортының ұзындығын табу.

1.	$A(1;\ 2;\ -1),\ B(1;\ 3;\ 4),\ C(0;\ 1;\ 5),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}.$	2.	$A(1;\ 2;\ -1),\ B(1;\ 3;\ 4),\ C(0;\ 1;\ 5),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}.$
3.	$A(1;\ 2;\ -1),\ B(1;\ 3;\ 4),\ C(0;\ 1;\ 5),$. $\vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.$	4.	$A(1;\ 2;\ -1),\ B(1;\ 3;\ 4),\ C(0;\ 1;5),$ $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}.$
5.	$A(1;\ 2;\ -1),\ B(1;\ 3;\ 4),\ C(0;\ 1;\ 5),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$	6.	$A(1;\ 2;\ -1),\ B(1;\ 3;\ 4),\ C(0;\ 1;\ 5),$ $\vec{a}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}.$
7.	$A(1;\ 2;\ -1),\ B(1;\ 3;\ 4),\ C(0;\ 1;\ 5),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}.$	8.	$A(1;\ 2;\ -1),\ B(1;\ 3;\ 4),\ C(0;\ 1;\ 5),$ $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}.$
9.	$A(1;\ 2;\ -1),\ B(1;\ 3;\ 4),\ C(0;\ 1;\ 5),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}.$	10.	$A(1;\ 2;\ -1),\ B(1;\ 3;\ 4),\ C(0;\ 1;\ 5),$ $\vec{a}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}.$
11.	$A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),\ C(6;\ 3;\ 1),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.$	12.	$A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),\ C(6;\ 3;\ 1),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}.$
13.	$A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),\ C(6;\ 3;\ 1),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$	14.	$A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),\ C(6;\ 3;\ 1),$ $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}.$
15.	$A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),\ C(6;\ 3;\ 1),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$	16.	$A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),\ C(6;\ 3;\ 1),$ $\vec{a}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}.$
117.	$A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),\ C(6;\ 3;\ 1),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}.$	118.	$A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),\ C(6;\ 3;\ 1),$ $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}.$
19.	$A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),\ C(6;\ 3;\ 1),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}.$	20.	$A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),\ C(6;\ 3;\ 1),$ $\vec{a}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}.$
21.	$A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),\ C(3;\ -2;\ 1),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}.$	22.	$A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),$ $C(3;\ -2;\ 1),\quad \vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}.$
23.	$A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),\ C(3;\ -2;\ 1),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$	24.	$A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),$ $C(3;\ -2;\ 1),\quad \vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}.$
25.	$A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),\ C(3;\ -2;\ 1),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$	26.	$A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),$ $C(3;\ -2;\ 1),\quad \vec{a}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}.$
27.	$A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),\ C(3;\ -2;\ 1),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}.$	28.	$A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),$ $C(3;\ -2;\ 1),\quad \vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}.$
29.	$A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),\ C(3;\ -2;\ 1),$ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}.$	30.	$A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),$ $C(3;\ -2;\ 1),\quad \vec{a}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}.$

6-8 тақырып.
Жазықтықтағы сызықтың теңдеуі

Дәрістің мақсаты:

1. Сызықтың теңдеуі түсінігін беру.
2. Жазықтықтағы түзудің әртүрлі теңдеулерін қорытып шығару.
3. Екі түзудің параллельдік және перпендикулярлық шарттарын анықтау.
4. Түзудің әртүрлі теңдеулерін құруда дағды мен біліктілікті қалыптастыру.

Қарастыратын сұрақтар тізімі:

1. Жазықтықтағы сызықтың теңдеуі.
2. Түзудің жалпы теңдеуі.
3. Түзудің толық емес теңдеулері. Түзудің «кесінділік» теңдеуі.
4. Түзудің бұрыштық коэффициентпен берілген теңдеуі.
5. Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі.
6. Екі түзу арасындағы бұрыш. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары.
7. Түзудің нормальдық теңдеуі. Нүктенің түзуден ауытқуы.

1. Жазықтықтағы сызықтың теңдеуі.

π жазықтығында Oxy декартты тіктөртбұрышты координаталар жүйесі және қандай да бір L сызығы берілсін деп ұйғарамыз. x және y екі айнымалыны байланыстыратын қандай да бір $\Phi(x,y)=0$ теңдеуін қарастырамыз.

$$\Phi(x,y)=0 \qquad (1)$$

Анықтама. Егер L сызығының бойындағы кез-келген нүктенің x және y координаталары берілген координаталар жүйесіне қатысты (1) теңдеуін қанағаттандырса және L сызығына жатпайтын бір де бір нүктенің x және y координаталары (1) теңдеуін қанағаттандырмаса, онда (1) теңдеуі L сызығының теңдеуі болып табылады.

Берілген координаталар жүйесінде L сызығы (1) теңдеуін қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орындары болып табылады.

Сызықты параметрлік түрде көрсету. L сызығын аналитикалық түрде көрсету үшін, осы сызықтың нүктелерінің x және y координаталарын үшінші көмекші t айнымалы (параметр) түрінде өрнектеу ыңғайлы:

$$x=\varphi(t),\ y=\Psi(t), \qquad (2)$$

мұндағы $\varphi(t)$ және $\Psi(t)$- t параметр бойынша үзіліссіз функциялар. Егер (2) теңдіктеріндегі t параметрін жойсақ, (1) түріндегі сызықтың теңдеуін аламыз.

2.Түзудің жалпы теңдеуі

Декарттық координатада әрбір түзу бірінші дәрежелі теңдеу арқылы анықталады. Керісінше әрбір бірінші дәрежелі теңдеу жазықтықта түзуді анықтайды.

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

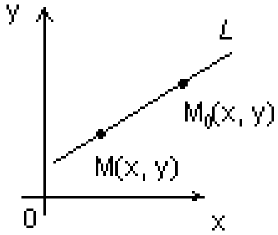
Кез келген A, B және C коэффициенттерімен берілген (1) теңдеуі **түзудің жалпы теңдеуі** деп аталады. А және В коэффициенттері бір мезгілде нөлге тең емес.

(1) теңдеуінің кем дегенде (x_0, y_0) бір шешімі бар, яғни координаталары (1) теңдеуін қанағаттандыратын кем дегенде бір $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі табылады. $Ax_0 + By_0 + C = 0.$ (2) – теңбе-теңдік алдық.

(1) теңдеуінен (2) теңдеуін азайтамыз. $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$ (3)

Біз (1) теңдеуіне эквивалентті теңдеу алдық.

(3) теңдеуі $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы өтетін және $\bar{n} = \{A, B\}$ векторына перпендикуляр L түзуін анықтайтындығын дәлелдейік.



Егер $M(x, y)$ нүктесі L түзуінде жататын болса, онда оның координаталары (3) теңдеуін қанағаттандырады.

$\overline{M_0 M} = \{x - x_0, y - y_0\}$, $\bar{n} = \{A, B\}$ векторын құрайық.

$$\overline{M_0 M} \cdot \bar{n} = (x - x_0)A + (y - y_0)B = 0.$$

Демек, $\overline{M_0 M} \perp \bar{n}$ ортогоналды векторлар екендігі шығады.

Біз (1) жалпы теңдеуімен анықталатын түзудің $\bar{n} = \{A, B\}$ векторына ортогоналдығын дәлелдедік. $\bar{n}$ векторы (1) түзуінің нормаль вектор деп аталады.

3. Түзудің толық емес теңдеулері. Түзудің «кесінділік» теңдеуі

Егер (1) теңдеуіндегі A, B және C коэффициенттерінің бірде біреуі нөлге тең болмаса, онда (1) теңдеуі **толық теңдеу** деп аталады.

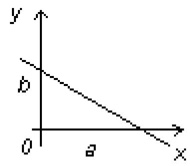
Ал егер A, B және C коэффициенттерінің кем дегенде біреуі нөлге тең болса, онда (1) теңдеуі **толық емес теңдеу** деп аталады.

Толық емес теңдеулердің түрлері:

1. $C = 0, \Rightarrow Ax + By = 0$ - координата басы арқылы өтетін түзу.
2. $B = 0, \Rightarrow Ax + C = 0,\ x = -\dfrac{C}{A} = C,\ x = a$ - Oy осіне параллель түзу
3. $A = 0, \Rightarrow By + C = 0.\quad y = -\dfrac{C}{B}$ немесе $y = b$ - Ox- ке параллель түзу,
4. $B = 0, C = 0, \Rightarrow Ax = 0$ Oy осін анықтайды.
5. $A = 0, C = 0, \Rightarrow By = 0$ Ox осін анықтайды.

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (4) теңдеуі түзудің «кесінділік» теңдеуі деп аталады.

(4) теңдеуіндегі a және b коэффициенттерінің геометриялық мағынасы: олар түзудің сәйкес Ox және Oy осьтерінен қиып түсетін кесінділердің шамаларына тең.

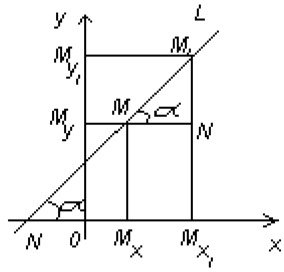


4. Түзудің бұрыштық коэффициентпен берілген теңдеуі

Ox осіне параллель емес кез келген түзуді қарастырайық. Түзудің Ox осіне көлбеу бұрышы түсінігін енгізейік.

α - Ox осінен L түзуімен беттескенше сағат тіліне қарсы бұрылу бұрышы.

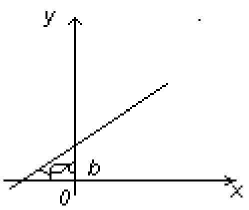
Ox осінің оң бағытымен жасайтын бұрыштың тангенсі бұрыштық коэффициент деп аталады және $k=tg\alpha$ деп белгіленеді.



$k(x-x_0)=y-y_0$ (5)- $M_0\left(x_0, y_0\right)$ нүктесі арқылы өтетін және k бұрыштық коэффициенті бар түзудің теңдеуі.

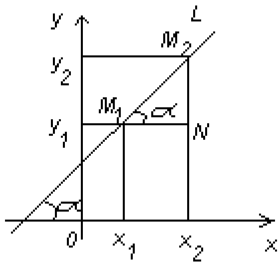
$y-y_0=kx-kx_0,\quad y=kx+(y_0-kx_0).$ y_0-kx_0 -өрнегін b деп қабылдасақ, онда $y=kx+b.$ (6) – теңдеуін аламыз.

(6) теңдеуі **түзудің бұрыштық коэффициентпен берілген теңдеуі** деп аталады. b - берідген түзудің координата басынан бастап есептеген кездегі, Oy осінен қиып түсетін кесіндісінің шамасы.



Егер түзу $Ax+By+C=0$ жалпы теңдеуімен берілген болса, онда оынң бұрыштық коэффициенті $k=-\frac{A}{B}$.

5. Түзудің бұрыштық коэффициентпен берілген теңдеуі



Үшбұрышты қарастырайық.

$tg\alpha = \dfrac{NM_2}{M_1N} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,

$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,

$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) = y - y_1$, түрлендіргеннен соң $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ (7) –ні аламыз.

(7) теңдеуі – берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

6. Екі түзу арасындағы бұрыш. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары

а) $L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ екі түзу берілсін.
L_1 түзуінің нормаль векторы $\overline{n}_1 = \{A_1, B_1\}$, ал L_2 түзуінің нормаль векторы $\overline{n}_2 = \{A_2, B_2\}$. Осы екі түзу арасындағы бұрышты табу үшін $\overline{n_1}$ және $\overline{n_2}$ нормаль векторларының арасындағы φ бұрышын табу керек.

$$\overline{n_1}\overline{n_2} = |\overline{n_1}||\overline{n_2}|\cos\varphi,\ \cos\varphi = \frac{n_1n_2}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|},\ \cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

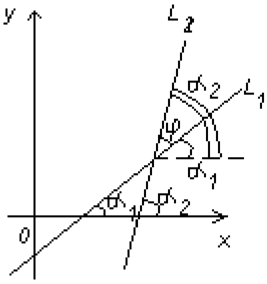
L_1 және L_2 түзулерінің параллельдік шарты $\overline{n_1}$ және $\overline{n_2}$ векторларының коллинеарлық шартынан шығады.

$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

L_1 және L_2 түзулерінің перпендикулярлық шарты $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$ -ден шығады.

$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

б) Егер L_1 және L_2 түзулерінің теңдеулері бұрыштық коэффициентпен берілсе $\begin{array}{l} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{array}$



яғни α_1 және α_2 - Ox осімен жасайтын L_1 және L_2 түзулерінің көлбеулік бұрыштары, ал φ - осы екі түзу арасындағы бұрыш болса, онда $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$$

$tg\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$ - L_1 және L_2 түзулерінің арсындағы φ бұрышын анықтайтын формула.

Егер түзулер арасындағы бұрыштың тангенсі нөлге тең болса, онда берілген түзулер параллель болады.

$tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = 0 \Rightarrow k_2 - k_1 = 0, 1 + k_2 k_1 \neq 0 \Rightarrow k_2 = k_1$ - екі түзудің параллельдік шарты.

L_1 және L_2 -нің перпендикулярлық шарты.

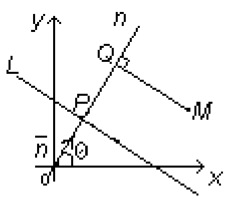
$L_1 \perp L_2$, онда $\varphi = 90^0$. φ бұрышының тангенсі жоқ. Формуланың бөлімі нөлге тең болады. $k_1 k_2 + 1 = 0$ $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ - екі түзудің перпендикулярлық шарты.

6. Түзудің нормальдық теңдеуі. Нүктенің түзуден ауытқуы

Теорема: Егер $Ax + By + C = 0$ және $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ жалпы теңдеулері бір түзуді ғана анықтаса, онда $A_1 = At, B_1 = Bx, C_1 = Cx$ теңсіздіктері ақиқат болатындай t саны табылады.

$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ (8) теңдеуі **түзудің нормальдық теңдеуі** деп аталады.

Кез келген M нүктесінің берілген L түзуінен ауытқуы.



d - M нүктесінен L түзуіне дейінгі арақашықтық болсын.

Анықтама: M нүктесінің L түзуінен δ **ауытқуы** деп $+d$ санын атайды, егер M нүктесі және O координата бас нүктесі берілген L түзуінің әр түрлі екі жағында жатса;

$-d$-ға тең, егер M нүктесі және O координата бас нүктесі берілген L түзуінің бір жағында жатса.

Теорема: Түзудің (8) нормаль теңдеуінің сол жағы координаталары x_0, y_0 болатын M нүктесінің $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ теңдеуімен анықталатын L түзуден ауытқуына тең.

$$d = |\delta|$$

Түзудің жалпы теңдеуінен нормальдық теңдеуге өту алгоритмі.

$Ax + By + C = 0$, $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$. Берілген теңдеулер бір түзуді анықтайтындықтан, қандай да бір t саны табылады.

$$tA = \cos\theta, \quad tB = \sin\theta, \quad tC = -p \qquad (9)$$

$t^2\left(A^2 + B^2\right) = 1$, $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ - нормальдық көбейткіш.

Мағынасы бойынша p арақашықтығы әрқашан да теріс емес болғандықтан, үшінші (9) теңіктерінен t таңбасының C таңбасына қарама-қарсы екендігі шығады. Сонымен түзудің $Ax + By + C = 0$ жалпы теңдеуін нормальдық теңдеуге келтіру үшін C коэффициентінің таңбасына қарама-қарсы болатын t нормальдық көбейткішке көбейту керек.

$d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ - нүктеден түзуге дейінгі арақашықтықты есептейтін формула.

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар:

1. Түзудің жалпы теңдеуін жазыңыз.
2. Нормаль вектордың анықтамасын беріңіз.
3. Түзудің барлық толық емес теңдеулерін атаңыз.
4. Түзудің «кесінділік» теңдеуі қалай анықталады?
5. Түзудің бұрыштық коэффициенті деп не аталады?
6. Берілген нүкте арқылы өтетін және берілген бұрыштық коэффициенті бар болатын түзудің теңдеуін жазыңыз.
7. Түзудің бұрыштық коэффициентпен берілген теңдеуін жазыңыз.
8. Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.
9. Екі түзу арасындағы бұрышты анықтауға арналған формуланы жазыңыз.
10. Екі түзудің параллельдік және перпендикулярлық шарттары.
11. Түзудің нормальдық теңдеуі қалай табылады?
12. Нүктден түзуге дейінгі арақашықтық қалай табылады ?
13. Нормальдық көбейткіш неге тең?

Жаттығулар:

1. АВС ұшбұрышының төбелері берілген. Табу керек:

1) ВС қабырғасының ұзындығын;

2) ВС түзуінің теңдеуін құру;

3) А төбесінен өтетін биіктіктің теңдеуін құру;

4) А төбесінен өтетін биіктіктің ұзындығын табу;

5) медианлардың қиылсу нүктесін табу;

1.	A$(-12,-3)$, B$(12,-10)$, C$(-6,\ 14)$	2.	A$(-19,-1)$, B$(5,-8)$, C $(-13,16)$
3.	A$(-6,-5)$, B$(18,-12)$, C$(0,\ 12)$	4.	A$(3,\ 12)$, B$(27,\ 5)$, C$(9,\ 29)$

5.	$A(6, 0), B(30, -7), C(12, 17)$	6.	$A(-9, 20), B(15, 13), C(-3, 37)$
7.	$A(-21, 18), B(3, 11), C(-15, 35)$	8.	$A(-15, 27), B(9, 20), C(-9, 44)$
9.	$A(-27, -24), B(-3, -31), C(-21, -7)$	10.	$A(-17, 26), B(7, 19), C(-11, 43)$
11.	$A(6, 2), B(30, -5), C(12, 19)$	12.	$A(4, 3), B(-12, -9), C(-5, 15)$
13.	$A(-1, 7), B(11, 2), C(17, 10)$	14.	$A(1, 1), B(-15, 11), C(-8, 13)$
15.	$A(-14, 10), B(10, 3), C(-8, 27)$	16.	$A(7, 1), B(-5, -4), C(-9, -1)$
17.	$A(-2, 1), B(-18, -11), C(-11, 13)$	18.	$A(10, -1), B(-2, -6), C(-6, -3)$
19.	$A(-12, 6), B(12, -1), C(-6, 23)$	20.	$A(8, 0), B(-4, -5), C(-8, -2)$
21.	$A(-20, 0), B(4, -7), C(-14, 17)$	22.	$A(-16, -8), B(8, -15), C(-10, 9)$
23.	$A(-20, -6), B(4, -13), C(-14, 10)$	24.	$A(-4, 7), B(20, 0), C(2, 24)$
25.	$A(-8, 8), B(16, 1), C(-2, 25)$	26.	$A(-24, 2), B(0, -5), C(-18, 19)$
27.	$A(-14, 6), B(10, -1), C(-8, 23)$	28.	$A(-8, -3), B(4, -12), C(8, 10)$
29.	$A(-5, 7), B(7, -2), C(11, 20)$	30.	$A(-12, -1), B(0, -10), C(4, 12)$

9 тақырып.
Жазықтықтың теңдеуі

Дәрістің мақсаты:

1. Студенттерде кеңістіктік ойлауды дамыту.
2. Теориялық мағлұматтарды есептерді шығарғанда қолдану дағдысын қалыптастыру.

Қарастырылатын сұрақтар:

1. Жазықтықтың жалпы теңдеуі.
2. Жазықтықтық толық емес теңдеулері. Жазықтықтың кесінділік теңдеуі.
3. Бір түзудің бойында жатпайтын әртүрлі үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі.
4. Екі жазықтық арасындағы бұрыш. Жазықтықтардың параллельдік перпендикулярлық шарттары.
5. Жазықтықтың нормаланған теңдеуі. Нүктенің жазықтықтан ауытқуы.

1. Жазықтықтың жалпы теңдеуі

Теорема: Декарттық координаталарда әрбір жазықтық бірінші ретті теңдеуарқылы анықталады.

$Ax + By + Cz + D = 0$ (1) жазықтықтың жалпы теңдеуі

Анықтама: $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығына перпендикуляр $\overline{n} = \{A, B, C\}$ векторы осы жазықтықтың нормаль векторы деп аталады.

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ (2) - берілген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және нормаль векторы $\overline{n} = \{A, B, C\}$ болатын жазықтықтың теңдеуі.

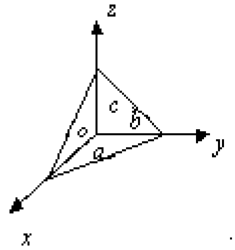
2. Жазықтықтың толық емес теңдеуі

Егер $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтықтың жалпы теңдеуіндегі барлық A, B, C, D коэффициенттері нөлден өзгеше болса, онда ол толық деп аталады. Егер коэффициенттердің біреуі нөлге тең болса, онда теңдеу толық емес деп аталады.

Толық емес теңдеулердің түрлері

1) Егер $D=0$ болса, онда $Ax+By+Cz=0$ теңдеуі координаттар басы арқылы өтетін жазықтықты анықтайды.
2) Егер $A=0$ болса, онда $By+Cz+D=0$ теңдеуі Ox өсіне параллель жазықтықты анықтайды.
3) Егер $B=0$ болса, онда $Ax+Cz+D=0$ теңдеуі Oy өсіне параллель жазықтықты анықтайды.
4) Егер $C=0$ болса, онда $Ax+By+D=0$ теңдеуі Oz өсіне параллель жазықтықты анықтайды.
5) Егер $A=B=0$ болса, онда $Cz+D=0$ теңдеуі Oxy координаталық жазықтыққа параллель жазықтықты анықтайды (немесе Ox және Oy өстеріне параллель).
6) $A=C=0$, онда $By+D=0$ Oxz өсіне параллель.
7) $B=C=0$, онда $Ax+D=0$ өсіне параллель Oyz.
8 $A=B=D=0$, онда $C_z=0$ Oxy координаталық жазықтығын анықтайды.
9) $A=C=D=0$, онда $B_y=0$ Oxz координаталық жазықтығын анықтайды.
10) $B=C=D=0$, онда $A_x=0$ Oyz координаталық жазықтығын анықтайды.

Жазықтықтың кесінділік теңдеуі. (1) жалпы теңдеді қарастырайық.



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

(3) – жазықтықтың кесінділік теңдеуі деп аталады.

(3) теңдеуіндегі а, в және с сандарының геометриялық мағынасы бар. Олар жазықтықтың сәйкес Ox, Oy, Oz осьтерінен координаталар бас нүктесінен бастап есептегенде қиып өтетін кесінділердің шамаларына тең.

3. Бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ -берілген нүктелер болсын.

$M(x, y, z)$ – жазықтықтың кез келгені нүктесі.

$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$

$\overline{M_1M_3}=\{x_3-x_1; y_3-y_1; z_3-z_1\}$

$\overline{M_1M}=\{x-x_1; y-y_1; z-z_1\}$

M нүктесі M_1, M_2, M_3 нүктелерімен бір жазықтықта жатады сонда тек сонда ғана, егер $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ векторлары компланар

болса. $\begin{vmatrix} x-x_1, y-y_1, z-z_1 \\ x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 \\ x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$ - бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі.

4. Екі жазықтық арасындағы бұрыш. Жазықтықтартың параллельдік және перпендикулярлық шарттары

α_1 және α_2 жазықтықтары жалпы теңдеулерімен берілсін.

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\overline{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\} \qquad \overline{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

Екі жазықтық арасындағы бұрышты табу үшін олардың нормаль векторлары арасындағы φ бұрышын табамыз. $\cos\varphi = \dfrac{\overline{n_1}\,\overline{n_2}}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|}$

Параллельдік шарт: α_1 жазықтығы α_2-ге параллель, демек $\overline{n_1}$ мен $\overline{n_2}$ коллинеар, ендеше $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

Перпендикулярлық шарт: $\alpha_1 \perp \alpha_2$, демек $\overline{n_1} \perp \overline{n_2}$, ендеше $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Теорема: Егер жазықтықта $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ теңдеулері бір жазықтықты анықтаса, онда олардың коэффициенттері пропорционалды болады.

5. Жазықтықтың нормаланған теңдеуі. Нүктеден жазықтыққа дейінгі арақашықтық

π жазықтығын қарастырайық.

Координаталар басынан π жазықтығына перпендикуляр n түзуін жүргізейік. P n түзуі мен π жазықтығының қиылысу нүктесі. Түзуде $\overline{OP}$ бағытымен сәйкес келетін бірлік векторды аламыз.

1) $\overline{OP}$ кесіндісінің P ұзындығы арқылы, $P = \overline{OP}$
2) $\overline{n}$ векторының сәйкес Ox, Oy, Oz өстеріне көлбеу α, β, γ бұрыштары арқылы π жазықтығының теңдеуін табу керек.

$\overline{n}$ –бірлік вектор болғандықтан, оның координаталары келесі түрде болады: $\overline{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

$M(x, y, z)$ нүктесі π жазықтығында жатады сонда тек сонда ғана, егер $\overline{OM}$ векторының $\overline{n}$ векторымен анықталатын оське проекциясы P-ға тең болса, яғни $np_n\overline{OM} = P$.

$\overline{n}$ – бірлік вектор болғандықтан $np_n\overline{OM} = \overline{n}\overline{OM}$, $\overline{a}\overline{b} = \overline{a}\overline{b}\cos\alpha$.

$\overline{nOM} = |\overline{n}||\overline{OM}|\cos\alpha = |\overline{OM}|\cos\alpha = np_n\overline{OM}$ демек

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0$ жазықтықтың нормаланған теңдеуі.

Кез келген А нүктесінің берілген π жазықтығынан ауытқуы туралы түсінік.
d саны A нүктесінен жазықтыққа дейінгі арақашықтық болсын.

Анықтама: π жазықтығынан A нүктесінің δ ауытқуы деп $+d$ саны аталады, егер A нүктесі және О координаталар бас нүктесі π жазықтығының әр жақтарында жатса және $-d$ саны, егер A және О π жазықтығынан бір жақта жатса.

π жазықтығынан $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіне дейінгі δ арақашықтығын табу үшін осы жазықтықтың нормаланған теңдеуінің сол жағына x, y, z координаталарының орнына M_0 нүктесінің координаталарын қоямыз.

A нүктесінен жазықтыққа дейінгі қашықтық ауытқудың модуліне тең. $d = |\delta|$

Жазықтықтың жалпы теңдеуін нормаланған түрге келтіру алгоритмі

$Ax + By + Cz + D = 0$ және $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0$ жалпы теңдеулер берілсін. Бұл жазықтықтар бір жазықтықты анықтайтындықтан келесі шартты қанағаттандыратын t саны табылады: $tA = \cos\alpha,\ tB = \cos\beta,\ tC = \cos\gamma,\quad tD = -P$

$t^2A^2 = \cos^2\alpha, t^2B^2 = \cos^2\beta, t^2C = \cos^2\gamma$

$t^2 = \dfrac{1}{A^2 + B^2 + C^2}$ демек $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

P қашықтығы мағынасы бойынша әр қашан теріс емес болғандықтан, онда $tD = -P$ -дан t санының таңбасы D-ның таңбасына қарама-қарсы болатынын қорытамыз. Жазықтықтың жалпы теңдеуін нормаланған түрге келтіру үшін оны D -ның таңбасына қарама-қарсы болатын нормаланған көбейткішке көбейту керек.

$d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ - нүктеден жазықтыққа дейінгі арақашықтықты есептейтін формула.

Өзін-өзі тексеру үшін сұрақтар:

1. Жазықтықтың жалпы теңдеуін жазыңыз, жазықтықтың нормаль векторына анықтама беріңіз?
2. Жазықтықтың барлық толық емес теңдеулерін жазыңыз. Жазықтың кесінділік теңдеуі қалай табылады?
3. Берілген үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін анықтайтын формуланы көрсетіңіз?
4. Екі жазықтық арасындағы бұрыш қалай табылады?
5. Екі жазықтықтың параллельдік және перпендикулярлық шартын көрсетіңіз?
6. Жазықтықтың нормаланған теңдеуінің формуласын жазыңыз?
7. Нүктеден жазықтыққа дейінгі арақашықтық қалай табылады?

Жаттығулар:

1. Үш M_1, M_2 и M_3 нүктеден өтетін жазықтықтан M_0 нүктесіне дейнгі арақашықты табу.

1. $M_1(-3,\ 4,\ -7)$,	$M_2(1,\ 5,\ -4)$,	$M_3(-5,\ -2,\ 0)$,	$M_0(-12,\ 7,\ -1)$.
2. $M_1(-1,\ 2,\ -3)$,	$M_2(4,\ -1,\ 0)$,	$M_3(2,\ 1,\ -2)$,	$M_0(1,\ -6,\ -5)$.
3. $M_1(-3,\ -1,\ 1)$,	$M_2(-9,\ 1,\ -2)$,	$M_3(3,\ -5,\ 4)$,	$M_0(-7,\ 0,\ -1)$.
4. $M_1(1,\ -1,\ 1)$,	$M_2(-2,\ 0,\ 3)$,	$M_3(2,\ 1,\ -1)$,	$M_0(-2,\ 4,\ 2)$.
5. $M_1(1,\ 2,\ 0)$,	$M_2(1,\ -1,\ 2)$,	$M_3(0,\ 1,\ -1)$,	$M_0(2,\ -1,\ 4)$.
6. $M_1(1,\ 0,\ 2)$,	$M_2(1,\ 2,\ -1)$,	$M_3(2,\ -2,\ 1)$,	$M_0(-5,\ -9,\ 1)$.
7. $M_1(1,\ 2,\ -3)$,	$M_2(1,\ 0,\ 1)$,	$M_3(-2,\ -1,\ 6)$,	$M_0(3,\ -2,\ -9)$.
8. $M_1(3,\ 10,\ -1)$,	$M_2(-2,\ 3,\ -5)$,	$M_3(-6,\ 0,\ -3)$,	$M_0(-6,\ 7,\ -10)$.
9. $M_1(-1,\ 2,\ 4)$,	$M_2(-1, -2, -4)$,	$M_3(3,\ 0,\ -1)$,	$M_0(-2,\ 3,\ 5)$.
10. $M_1(0, -3, 1)$,	$M_2(-4,\ 1,\ 2)$,	$M_3(2,\ -1,\ 5)$,	$M_0(-3,\ 4,\ -5)$.
11. $M_1(1,\ 3, 0)$,	$M_2(4,\ -1,\ 2)$,	$M_3(3,\ 0,\ 1)$,	$M_0(4,\ 3,\ 0)$.
12. $M_1(-2,\ -1, -1)$,	$M_2(0,\ 3,\ 2)$,	$M_3(3,\ 1,\ -4)$,	$M_0(-21,\ 20,\ -16)$.
13. $M_1(-3,\ -5,\ 6)$,	$M_2(2,\ 1,\ -4)$,	$M_3(0,\ -3,\ -1)$,	$M_0(3,\ 6,\ 68)$.
14. $M_1(1,\ 5,\ -7)$,	$M_2(-3, 6,\ 3)$,	$M_3(-2,\ 7,\ 3)$,	$M_0(1,\ -1,\ 2)$.
15. $M_1(1,\ -1,\ 2)$,	$M_2(2,\ 1,\ 2)$,	$M_3(1,\ 1,\ 4)$,	$M_0(-3,\ 2,\ 7)$.
16. $M_1(1,\ 3,\ 6)$,	$M_2(2, 2, 1)$,	$M_3(-1, 0, 1)$,	$M_0(5, -4, 5)$.
17. $M_1(-4,\ 2, 6)$,	$M_2(2,\ -3,\ 0)$,	$M_3(-10,\ 5,\ 8)$,	$M_0(-12,\ 1, 8)$.
18. $M_1(7,\ 2,\ 4)$,	$M_2(7,\ -1,\ -2)$,	$M_3(-5, -2, -1)$,	$M_0(10,\ 1,\ 8)$.
19. $M_1(2,\ 1,\ 4)$,	$M_2(3,\ 5,\ -2)$,	$M_3(-7,\ -3,\ 2)$,	$M_0(-3, 1, 8)$.
20. $M_1(-1,\ -5,\ 2)$,	$M_2(-6,\ 0, -3)$,	$M_3(3,\ 6, -3)$,	$M_0(10,\ -8, -7)$.
21. $M_1(0, -1, -1)$,	$M_2(-2,\ 3, 5)$,	$M_3(1, -5, -9)$,	$M_0(-4, -13,\ 6)$.
22. $M_1(5,\ 2,\ 0)$,	$M_2(2,\ 5,\ 0)$,	$M_3(1,\ 2,\ 4)$,	$M_0(-3,\ -6,\ -8)$.
23. $M_1(2,\ -1,\ -2)$,	$M_2(1,\ 2,\ 1)$,	$M_3(5,\ 0,\ -6)$,	$M_0(14,\ -3,\ 7)$.
24. $M_1(-2,\ 0,\ -4)$,	$M_2(-1,\ 7,\ 1)$,	$M_3(4,\ -8,\ -4)$,	$M_0(-6,\ 5,\ 5)$.
25. $M_1(14,\ 4,\ 5)$,	$M_2(-5,\ -3,\ 2)$,	$M_3(-2, -6, -3)$,	$M_0(-1, -8,\ 7)$.
26. $M_1(1,\ 2,\ 0)$,	$M_2(3,\ 0,\ -3)$,	$M_3(5,\ 2,\ 6)$,	$M_0(-13,\ -8,\ 16)$.
27. $M_1(2,\ -1,\ 2)$,	$M_2(1,\ 2,\ -1)$,	$M_3(3,\ 2,\ 1)$,	$M_0(-5,\ 3,\ 7)$.
28. $M_1(1,\ 1,\ 2)$,	$M_2(-1,\ 1,\ 3)$,	$M_3(2, -2,\ 4)$,	$M_0(2, 3,\ 8)$.
29. $M_1(2, 3, 1)$,	$M_2(4,\ 1,\ -2)$,	$M_3(6,\ 3,\ 7)$,	$M_0(-5, -4,\ 8)$.

30. $M_1(1,\ 1,\ -1)$,	$M_2(2,\ 3,\ 1)$,	$M_3(3,\ 2,\ 1)$,	$M_0(-3,\ -7,\ 6)$.

2.Жазықтықтар арасындағы бұрышты табу:

1. $x-3y+5=0,\ \ 2x-y+5z-16=0$.
2. $x-3y+z-1=0,\ \ x+z-1=0$.
3. $4x-5y+3z-1=0,\ x-4y-z+9=0$.
4. $3x-y+2z+15=0, 5x+9y-3z-1=0$.
5. $6x+2y-4z+17=0, 9x+3y-6z-4=0$.
6. $x-y\sqrt{2}+z-1=0,\ \ x+y\sqrt{2}-z+3=0$.
7. $3y-z=0,\ \ 2y+z=0$.
8. $6x+3y-2z=0, x+2y+6z-12=0$.
9. $x+2y+2z-3=0, 16x+12y-15z-1=0$
10. $2x-y+5z+16=0, x+2y+3z+8=0$.
11. $2x+2y+z-1=0, x+z-1=0$.
12. $3x+y+z-4=0, x+2y+3z+8=0$.
13. $3x-2y-2z-16=0, x+y-3z-7=0$.
14. $2x+2y+z+9=0, x-y+3z-1=0$.
15. $x+2y+2z-3=0, 2x-y+2z+5=0$.
16. $3x+2y-3z=0,\ \ x+y+z-7=0$.
17. $x-3y-2z-8=0,\ x+y-z+3=0$.
18. $3x-2y+3z+23=0,\ y+z+5=0$.
19. $x+y+3z-7=0,\ y+z-1=0$.
20. $x-2y+2z+17=0, x-2y-1=0$.
21. $x+2y-1=0,\ x+y+6=0$.
22. $2x-z+5=0,\ \ 2x+3y-7=0$.
23. $5x+3y+z-18=0,\ 2y+z-9=0$.
24. $4x+3z-2=0,\ x+2y+2z+5=0$.
25. $x+4y-z+1=0,\ 2x+y+4z-3=0$.
26. $2y+z-9=0,\ x-y+2z-1=0$.
27. $2x-6y+14z-1=0, 5x-15y+35z-3=0$.
28. $x-y+7z-1=0,\ 2x-2y-5=0$.
29. $3x-y-5=0,\ 2x+y-3=0$.
30. $x+y+z\sqrt{2}-3=0, x-y+z\sqrt{2}-1=0$

10 тақырып.

Кеңістіктегі түзу сызық

Дәрістің мақсаты:

1. Студенттерде кеңістіктік ойлауды дамыту.
2. Теориялық мағлұматтарды есептерді шығарғанда қолдану дағдысын қалыптастыру.

Қарастырылатын сұрақтар:

1. Кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі.
2. $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі.
3. Кеңістіктегі түзулер арасындағы бұрыш. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары.
4. Екі түзудің бір жазықтыққа тиісті болу шарты.
5. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш.Түзу мен жазықтықтың параллельдік және перпендикулярлық шарттары.

1. Кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі

Анықтама: Кеңістіктегі түзу сызық екі жазықтықтың қиылысуымен, яғни $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ шарты орындалатындай, бірінші дәрежелі $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ (1) теңдеулерімен анықталады.

Анықтама: Берілген түзуге параллель кез келген нөлдік емес вектор осы түзудің бағыттаушы векторы деп аталады.

Кеңістікте берілген $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесі арқылы және берілген $\bar{q} = \{l, m, n\}$ бағыттаушы векторы бар түзудің теңдеуін қорыту.

$M(x, y, z)$ нүктесі түзуге тиісті болады сонда тек сонда ғана, егер $\overline{MM_1} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$ және $\bar{q} = \{l, m, n\}$ векторлары коллинеар болса.

Коллинеар болу шарты $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ (2)

(2) теңдеуі кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі деп аталады.

Кей жағдайда $\bar{q} = (0, m, n)$ $\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ болуы мүмкін.

(2) теңдігіндегі бір бөлімнің нөлге айналуы сәйкес алымының да нөлге айналатындығын білдіреді.

2. Берілген $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі

Түзудің теңдеуі $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесі арқылы өтеді және $\bar{q} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ бағыттаушы векторы бар болады.

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$

(3) – кеңістіктегі берілген $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

Түзудің параметрлік теңдеулерін түзудің канондық теңдеулерінен алады.

$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=t$, мұндағы $-\infty<t<\infty.$

$x-x_1=lt,\ \ y-y_1=mt,\ \ z-z_1=nt.$

$$\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \\ z=z_1+nt \end{cases}$$ (4) –түзудің параметрлік теңдеуі.

3. Кеңістіктегі түзулер арасындағы бұрыш. Түзулердің перпендикулярлық және параллельдік шарттары

L_1 және L_2 түзулері өзідерінің канондық теңдеулерімен берілсін.

$$L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}\ .$$

Онда L_1 және L_2 түзулері арасындағы бұрышты анықтауға арналған есеп олардың $\bar{q}_1=\{l_1,m_1,n_1\},\ \bar{q}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$ бағыттаушы векторларының арасындағы φ бұрышын анықтауға тіреледі:

$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$ (5) – екі түзу арасындағы бұрышты анықтауға арналған формула.

L_1 және L_2 түзулерінің параллельдік шарты - $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ (6).

L_1 және L_2 түзулерінің перпендикулярлық шарты - $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ (7).

4. Екі түзудің бір жазықтыққа тиісті болу шарты

Кеңістікте L_1 және L_2 екі түзуі

1) Қиылысуы мүмкін
2) параллель болуы мүмкін
3) айқасуы мүмкін

Алғашқы екі шартта L_1 және L_2 түзулері бір жазықтықта жатыр.

$$L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1};\quad L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}\ .$$

L_1 және L_2 түзулері бір жазықтыққа тиісті болу үшін $\overline{M_1M_2}$, $\bar{q}_1$ және $\bar{q}_2$ векторлары компланар болуы қажетті және жеткілікті.
Үш вектордың компланар болу шарты: $\overline{M_1M_2}\ \bar{q}_1\,\bar{q}_2$ =0.

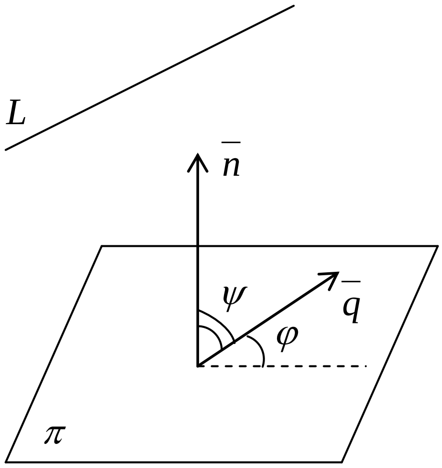
$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & l_1 & n_1 \\ m_2 & l_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$ (8) - L_1 және L_2 екі түзуінің бір жазықтыққа тиісті болу шарты.

Егер L_1 және L_2 түзулері (8) шартты қанағаттандырса, онда олар не қиылысады, не параллель болады. L_1 және L_2 түзулерінің параллельдік шарты (6) түрінде болса, онда L_1 және L_2 түзулері қиылысуы үшін $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ пропорциясынан ең болмағанда біреуі орындалмай, (8) шартты қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті.

5. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш. Түзу мен жазықтықтың параллельдік және перпендикулярлық шарттары

$Ax+By+Cz+D=0$ жалпы теңдеуімен берілген π жазықтығын және

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$



канондық теңдеуімен берілген L түзуін қарастырамыз.
Түзу мен π жазықтығы арасындағы φ бұрышы $\vec{n}$ және $\vec{q}$ векторлары арасындағы ψ бұрышына толықтауыш болып табылады.
Скалярлық көбейтінді арқылы табамыз:

$$\cos\psi=\frac{\overline{qn}}{|n||g|},$$

$\psi=90^0-\varphi$ $\qquad \cos\psi=\cos(90^0-\varphi)=\sin\varphi$,

$$\sin\varphi=\frac{\overline{qn}}{|\bar{n}||\bar{g}|}=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$ (9) - түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты анықтайтын формула.

L түзуі мен π жазықтығының параллельдік шарты. $\quad \bar{n}\perp\bar{q}\quad Al+Bm+Cn=0.$

L түзуі мен π жазықтығының перпендикулярлық шарты.

$\bar{n}\,||\,\bar{q}\qquad \frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$

$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ түзуінің $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтыққа тиісті болу шарты

$M(x_1, y_1, z_1)\in\pi$, $\bar{n}\perp\bar{q}$

$$\begin{cases} Ax_1+B\,y_1+Cz_1+D=0 \\ Al+Bm+Cn=0 \end{cases}$$

(10) – түзудің жазықтыққа тиісті болу шарты.

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар:

1. Кеңістіктегі түзудің канондық теңдеулерін жазыңыз.
2. Түзудің бағыттаушы векторы қалай анықталады?
3. Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.
4. Кеңістіктегі түзудің параметрлік теңдеуін жазыңыз.
5. Екі түзу арасындағы бұрышты қалай табады?
6. Кеңістіктегі екі түзудің параллельдік және перпендикулярлық шарттарын анықтау керек.
7. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты қалай табады?
8. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық және параллельдік шарттарын анықтау керек.
9. Екі түзудің бір жазықтыққа тиісті болу шарты қалай анықталады?
10. Бір түзудің жазықтыққа тиісті болу шартын табыңыз.

Жаттығулар:

1.Түзудің канондық теңдеуін жазу:

1. $\begin{cases} 2x-y-3z+1=0, \\ x+5y+z=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y+3z-1=0, \\ 2x-3y+2z-9=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 8x+3y-6z-2=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y-z+2=0, \\ 4x-3y+z-1=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+5y-3z-4=0, \\ 4x-3y+2z-9=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x+7y-z-8=0, \\ x+2y+z-4=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+4y+2z-8=0, \\ x+5y+z=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x-4y-3z+3=0, \\ 3x+y+z-5=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x+2y+z-4=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x+y+z-5=0, \\ 4x-3y+z-1=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+y+z-2=0, \\ 2x-y-3z+6=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x-3y+2z+2=0, \\ x+3y+z+14=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 2x+2y-z-8=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ x-y-2z+2=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x+3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x+y-z-6=0, \\ 3x-y+2z=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+5y+2z+11=0, \\ x-y-z-1=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x+4y-2z+1=0, \\ 2x-4y+3z+4=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x+y-3z+4=0, \\ x-y+2z+2=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x-y-z-2=0, \\ x-2y+z+4=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x+y-3z+2=0, \\ 2x-y+z-8=0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x+3y-2z-1=0, \\ 2x-3y+z+6=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 6x-7y-4z-2=0, \\ x+7y-z-5=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 8x-y-3z-1=0, \\ x+y+z+10=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 6x-5y-4z+8=0, \\ 6x+5y+3z+4=0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x+5y-z-5=0, \\ 2x-5y+2z+5=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x-3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x+y+2z+4=0, \\ x-y-3z+2=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 4x+y+z+2=0, \\ 2x-y-3z-8=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x+y-3z-2=0, \\ 2x-y+z+6=0. \end{cases}$

2. Жазықтықпен түзудің қиылсу нүктесін табу:

1. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$ и $x+2y+3z-14=0$

2. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$ и $x+2y-5z+20=0$.

3. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ и $x-3y+7z-24=0$

4. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{2}$ и $2x-y+4z=0$

5. $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$ и $3x+y-5z-12=0$.

6. $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$ и $x+3y-5z+9=0$.

7. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ и $x-2y+5z+17=0$.

8. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-4}{1}$ и $x-2y+4z-19=0$.

9. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1}$ и $2x-y+3z+23=0$.

10. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}$ и $2x-3y-5z-7=0$.

11. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}$ и $4x+2y-z-11=0$.

12. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}$ и $3x-2y-4z-8=0$.

13. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}$ и $x+2y-z-2=0$.

14. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3}$ и $5x-y+4z+3=0$.

15. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$ и $x+3y+5z-42=0$.

16. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2}$ и $7x+y+4z-47=0$.

17. $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{5}$ и $2x+3y+7z-52=0$.

18. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$ и $3x+4y+7z-16=0$.

19. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1}$ и $2x-5y+4z+24=0$.

20. $\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12}$ и $x-2y-3z+18=0$.

21. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0}$ и $x+7y+3z+11=0$.

22. $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{2}$ и $3x+7y-5z-11=0$.

23. $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-1}$ и $4x+y-6z-5=0$.

24. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-8}{0}$ и $5x+9y+4z-25=0$.

25. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}$ и $x+4y+13z-23=0$.

26. $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{3}$ и $3x-2y+5z-3=0$.

27. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-2}$ и $3x-y+4z=0$.

28. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-2}$ и $x+2y-5z+16=0$.

29. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{-2}$ и $3x-7y-2z+7=0$.

30. $\frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{11}$ и $5x+7y+9z-32=0$.

11-13 тақырып
Екінші ретті қисықтар

Мақсаты:

1. Екінші ретті қисықтар теориясымен таныстыру.
2. Теориялық мағлұматтарды есептерді шығарғанда қолдану дағдысын қалыптастыру.

Қарастырылатын сұрақтар:

1. Шеңбердің теңдеуі.
2. Эллипстің теңдеуі, қасиеттері.
3. Гипербаланың теңдеуі, қасиеттері.
4. Парабаланың теңдеуі, қасиеттері.
5.Эллипстің, гипербаланың және параболаның полярлық теңдеуі.

1. Шеңбердің теңдеуі

Центр деп аталатын, берілген нүктеден беоілген қашықтықта орналасқан нүктелер жиынының теңдеуін құрамыз. Жазықтықта осылайша анықталған нүктелер жиыны шеңбер деп аталады.

Жазықтықта қандай-да бір тікбұрышты координаталар жүйесі және 0_1 (x_1, y_1) , M (x,y)нүктелері берілсін.

$x^2+y^2=a^2$ - центрі (0; 0) координаталар бас нүктесінде, радиусы $r = a$, болатын шеңбердің теңдеуі.

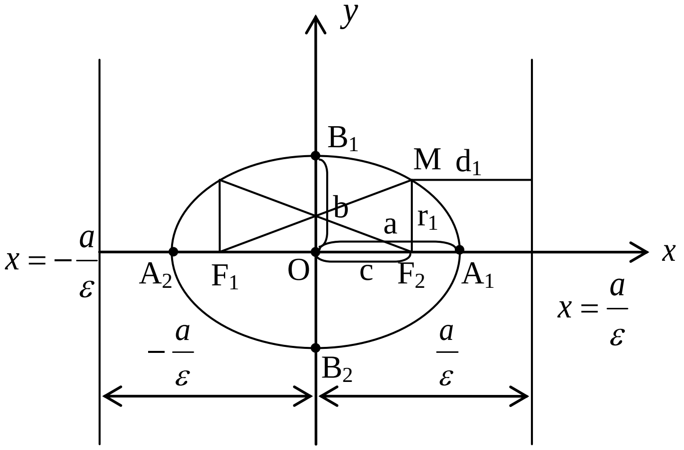
$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ - центрі $C(a,\ b)$ нүктесінде, радиусы $r = a$, болатын шеңбердің теңдеуі.

2. Эллипстің теңдеуі, қасиеттері

Анықтама: Фокустар деп аталатын берілген екі нүктеден қашықтықтарының қосындысы әрқашан тұрақты шама болатын нүктелердің геометриялық орындарын эллипс деп атайды .

F_1, F_2-фокустар, M- эллипстің кез келген нүктесі

F_1M, F_2M - эллипстің фокальдық радиустары.
Анықтама бойынша $F_1M + F_2M = 2a$ тұрақты шама.
F_1, $F_2 = 2c$ фокустар арасындағы арақашықтық
Эллипстің анықтамасы бойынша $2a > 2c$ немесе $a > c$.
$F_2(-c;0)$,$F_1(c;0)$- фокустың координаталары.



Эллипс берілсін. Егер берілген эллипстің фокустары декартты тікбұрышты координаталар жүйесіндегі абсцисса осінің бойында, берілген координаталар жүйесіне қатысты симметриялы орналасса, онда осы координаталар жүйесіндегі эллипстің теңдеуі келесі түрде болады:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1) \text{ – эллипстің канондық теңдеуі}$$

$$b^2 = a^2 - c^2; \quad a > b.$$

Эллипстің формасын зерттеуі :

1. Симметрия. Эллипстің канондық теңдеуінде ағымдық координаталардың квадраттары болғандықтан , егер (x, y) нүктесі эллипске тиісті болса, онда $(\pm x, \pm y)$ нүктелері де эллипске тиісті болады.

Ендеше эллипстің екі симметрия осьтері бар: ОХ және ОУ .

Эллипстің фокустары орналасқан симметрия осі эллипстің фокальдық осі деп аталады. Симметрия осітерінің қиылысу нүктесі эллипстің центрі болып табылады.

2. Эллипстің симметрия осьтерімен қиылысу нүктесі оның төбелері деп аталады.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \cap OX \qquad y = 0 \qquad \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad x = \pm a$$

$$\cap OY \qquad x = 0 \qquad y = \pm b$$

$A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$, $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$ – эллипстің төбелері.

A_1 A_2 және B_1 B_2 кесінділері - эллипстің қарама- қарсы төбелерін қосатын кесінділер, ал олардың ұзындықтары 2а және 2в - эллипстің сәйкес үлкен және кіші осьтері деп аталады.

а – үлкен жарты ось, в- кіші жарты ось.

3. Эллипстің формасы.

Эллипстің формасын зерттеу үшін $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ теңдеуінде x≥0, y≥0 деп есептеу жеткілікті. Ендеше

$$(1) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \le 1, \qquad x^2 \le a^2$$

$$\begin{cases} -a \le x \le a \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \le x \le a .$$

x - 0-ден а-ға дейін өкенде, у в-дан 0-ге деиін кемиді.

4 Эллипстің эксцентриситеті және директрисасы.

$\frac{c}{a}=\varepsilon$ шамасы эллипстің эксцентриситеті деп аталады.

$\frac{c}{a}<1$ болғандықтан, эллипс үшін $\varepsilon < 1$.

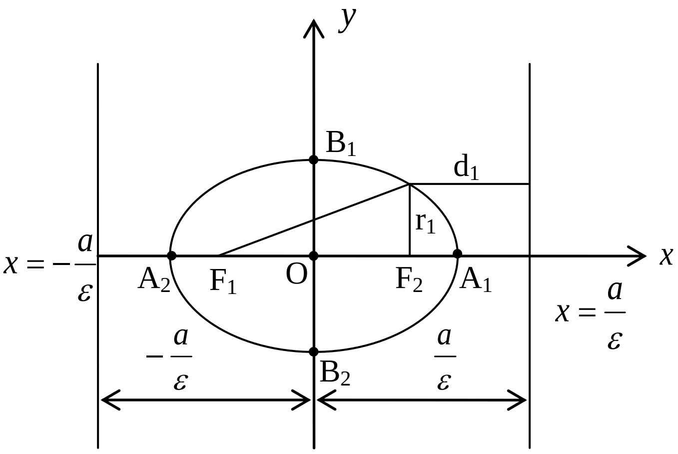
$\begin{cases} r_2 = a + x\varepsilon \\ r_1 = a - x\varepsilon \end{cases}$ эллипстің фокальдық радиустары үшін анықталған формула.

Анықтама: Эллипстің фокальді осіне перпендикуляр және оның центрінен $x=\frac{a}{\varepsilon}$, $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ қашықтықта орналасқан екі түзу эллипстің директрисалары деп аталады.

Директрисаның қасиеті

Эллипстің кез келген нүктесінен фокусқа дейінгі арақашықтықтың сәйкес директсисаға дейінгі арақашықтыққа қатынасы ε - тұрақты шамаға тең.

$\boxed{\frac{r}{d}=\varepsilon}$ - директрисаның қасиеті



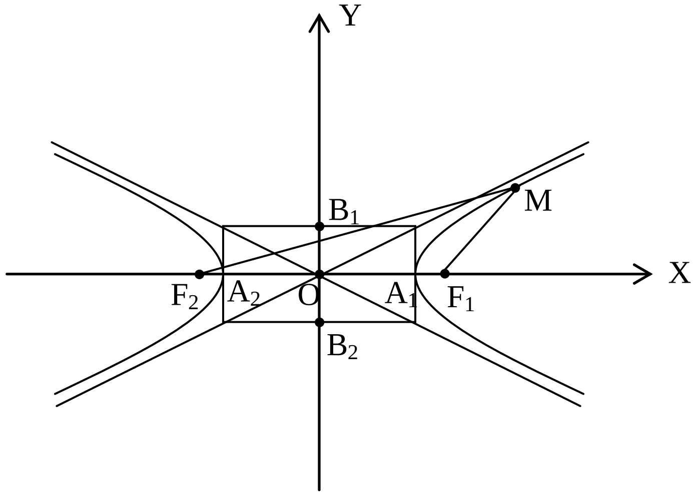
3. Гиперболаның теңдеуі, қасиеттері

Анықтама: Фокустар деп аталатын берілген екі нүктеден қашықтықтарының айырымы арқашанда тұрақты шама болатын нүктелердің геометриялық орындарын гипербола деп атайды.

Көрсетілген айырым абсолют мәні бойынша алынады және 2а деп белгіленеді.

Гиперболаның фокустарын F_1 және F_2 әріптерімен белгілейді, ал олардың арақашықтығы $F_1F_2=2c$ тең.

Анықтама бойынша 2а < 2с , немесе а < с.



Гипербола берілсін. Координата осьтерін эллипсте сияқты таңдап аламыз. Онда таңдап алынған координаталар жүйесіндегі гиперболаның теңдеуі келесі түрде болады:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - (2) гиперболаның канондық теңдеуі, $b=\sqrt{c^2-a^2}$

Гиперболаны зерттеуі:

1.Гиперболаның канондық теңдеуіне байланысты, оның екі симметрия осі бар. Бір ось фокустар арқылы өтеді және гиперболаның нақты осі деп аталады. Ал нақты оське перпендикуляр координаталар басы арқылы өтетін екінші ось жорамал ось деп аталады.

2.Гиперболаның ОХ осімен қиылысыу у=0 $\frac{x^2}{a^2}=1$ $x^2=a^2$ $x=\pm a$

$A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$

Гиперболаның ОУ осімен қиылысуы: х=0

$-\frac{y^2}{b^2}=1$ $y^2=-b^2$, демек гипербола ОУ осімен қиылыспайды. ОУ осі гиперболаның жорамал осі деп аталады. Гиперболаның нақты осі гиперболаны A_1 және A_2 нүктелерінде қияды, олар гиперболаның төбелері деп аталады.

2а- үлкен ось, а- үлкен жарты ось

2в- кіші ось, в- кіші жарты ось

3.Қабырғалары 2а және 2в болатын тіктөртбұрыш гиперболаның негізгі тіктөртбұрышы деп аталады. Негізгі тіктөртбұрыштың диагональдары гиперболаның асимптоталары деп аталады.

B_1(о,в), B_2 (о,-в)

4. $\varepsilon=\frac{c}{a}$ шамасы гиперболаның эксцентриситеті деп аталады.

$\underline{\varepsilon>1}$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{a} = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \varepsilon^2 - 1 \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

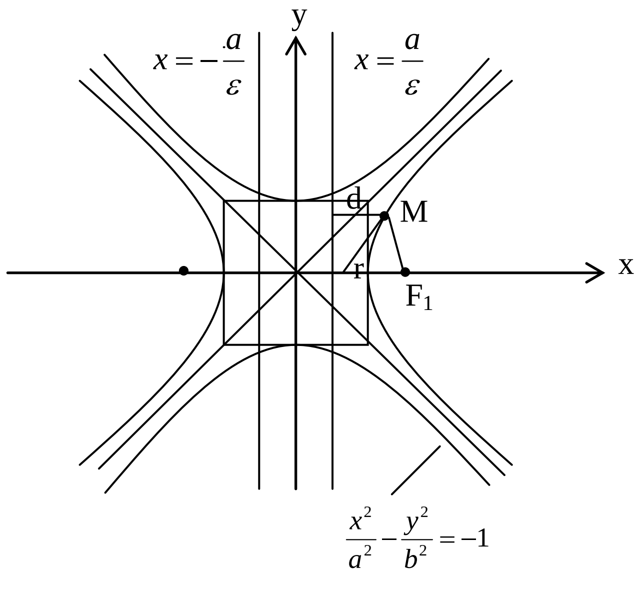
Гиперболаның эксцентриситеті оның негізгі төртбұрышының формасын, яғни гиперболаның формасын сипаттайды. ε аз болған сайын оның негізгі төртбұрышы созылыңқы болады.

5. Жарты осьтері тең гиперблоа теңқабырғалы деп аталады.

$a = b$ $\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad\qquad x^2 - y^2 = a^2$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

$$y \pm \frac{b}{a}x, \quad y = \pm x$$



6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ гиперболасы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболасымен түйіндес деп аталады.

7. Ггиперболаның фокальдық радиустарын өрнектейтін формулалар.

$M(x; y)$ - гиперболаның кез келген нүктесі болсын.

$F_2M = r_1$, $F_2M = r_1$ - М нүктесінің фокальдық радиустары.

$\begin{cases} r_1 = \varepsilon x - a \\ r_2 = \varepsilon x + a \end{cases}$ - гиперболаның оң тармағы үшін.

$\begin{cases} r_1 = a - \varepsilon x \\ r_2 = -\varepsilon x - a \end{cases}$ - гиперболаның сол тармағы үшін.

8. Гиперболаның директрисалары.

Анықтама: Гиперболаның, оны қиятын осіне перпендикуляр және центрден $\frac{a}{\varepsilon}$ арақашықтықта орналасқан екі түзу гиперболаның директрисалары деп аталады.

$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ - директрисалардың теңдеулеріі.

9. Директрисаның қасиеті.

Егер *r* – кез келген нүктеден фокусақа дейінгі қашықтық , ал d – сол нүктеден осы фокусқа сәйкес директрисаға дейінгі қашықтық болса, онда $\frac{r}{d}$ қатынасы ε тұрақты шамаға тең.

$\frac{r}{d} = \varepsilon$

4. Параболаның теңдеуі, қасиеттері

Анықтама: Фокус деп аталатын берілген нүктеден және директриса деп аталатын берілген түзуден арақашықтықтары бірдей болатын нүктелердің геометриялық орындарын парабола деп атайды.

Параболаның фокусы F әрпімен, фокустан директрисаға дейінгі арақашықтық *p* әрпімен белгіленеді.

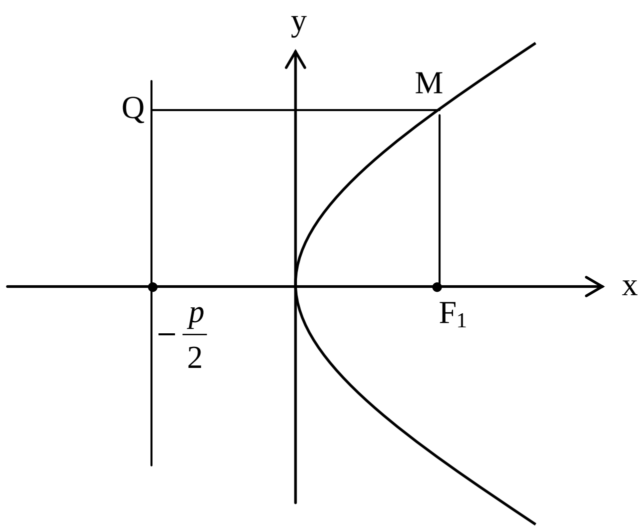
p саны параболаның параметрі деп аталады.

$F(\frac{p}{2};0)$ фокустың координаталары.

Парабола берілсін.

$\boxed{y^2 = 2px}$ - (3) параболаның канондық теңдеуі.

$x = -\frac{p}{2}$ - параболаның директрисасының теңдеуі.

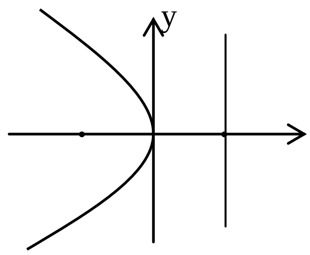


Параболаның қасиеттері:

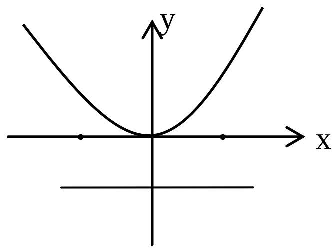
1. Параболаның (OX) симметрия осі бар. Параболаның симметрия осімен қиылысу нүктесі параболаның төбесі деп аталады.
2. Парабола OXY оң жарты жазықтықта орналасады.
3. $y^2 = 2px$ теңдеуімен анықталған параболаның директрисасы келесі түрге ие болады: $x = -\frac{p}{2}$.

Канондық теңдеулер:

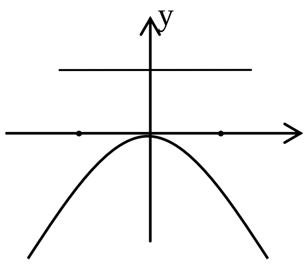
$$y^2 = -2px$$
$$x_{дир} = \frac{p}{2}$$



$$x^2 = 2py$$
$$y_{дир} = -\frac{p}{2}$$
$$p = \frac{1}{2} \Rightarrow y = x^2$$

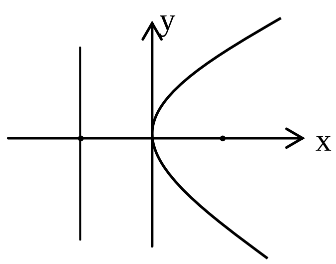


$$x^2 = -2py$$
$$y_{д} = \frac{p}{2}$$



4 $M(x;y)$- кез келген нүктенің r фокусы.

$$r = d = x + \frac{p}{2} \qquad \text{r} = \text{x} + \frac{p}{2}$$



Жалпы анықтама: Конустық қима (эллипс, гипербола, парабола) деп, берілген нүктеден (F) берілген түзуге (директриса) дейінгі арақашықтықтардың қатынасы ε тұрақты шама болатын нүктелердің геометриялық орындары аталады.

5. Эллипс, гипербола және параболаның полярлық теңдеуі.

Эллипс, гипербола және парабола үшін полярлық теңдеу келесі түрде болады:

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}}$$

-мұндағы ρ, θ -сызықтағы кез келген нүктенің полярлық координаталары, ρ - фокалды параметрі, ε -эксцентриситет
(эллипс үшін $\varepsilon < 1$, гипербола үшін $\varepsilon > 1$, парабола үшін $\varepsilon = 1$).

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар:

1. Шеңбердің теңдеуі қалай анықталады?
2. Эллипстің анықтамасын, канондық теңдеуін беріңіз.
3. Эллипстің фокусының координаталарын жазыңыз.
4. Эллипстің эксцентриситетін және оның белгіленуінің анықтамасын беріңіз.
5. Эллипстің директрисасы қалай анықталады?
6. Гиперболаның анықтамасын, канондық теңдеуін беріңіз?
7. Гиперболаның қанша симметрия осі бар?
8. Гиперболаның қандай осін нақты деп атайды?
9. Гиперболаның негізгі тіктөртбұрышы деген не?
10. Гиперболаның эксцентриситеті деген не ?
11. Гиперболаның фокалды остері туралы не айта аласыз?
12. Гиперболаның директрисалары деген не?
13. Параболаның анықтамасын, канондық теңдеуін беріңіз.
14. Параболаның қасиеттерін беріңіз
15. Эллипс, гипербола және параболаның полярлық теңдеуі қалай анықталады.

Жаттығулар

Берілген теңдеулер бойынша қисықтарды салу. Қисықтын түрін анықтау.

№	Уравнения кривых 2-го порядка	№	Уравнения кривых 2-го порядка
1.	а) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1;$ в) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1;$ г) $y^2 = 9x$.	16	а) (x – 3)2 + (y – 2)2 = 9; б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1;$ в) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{49}=1;$ г) y2 = – 4x.

2	а) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$; б) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$; в) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$; г) $y^2 = 7x$.	17	а) (x – 5)2 + (y + 3)2 = 4; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{49} = 1$; в) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$; г) y2 = – 2x.
3	а) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$; б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$; в) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; г) $y^2 = 5x$.	18	а) (x + 1)2 + (y + 1)2 = 16; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$; в) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$; г) y2 = – 6x.
4	а) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; в) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{25} = 1$; г) $y^2 = 16x$.	19	а) (x + 4)2 + (y – 3)2 = 25; б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$; в) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{64} = 1$; г) y2 = – x.
5	а) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 4$; б) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$; в) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$; г) $y^2 = 3x$.	20	а) (x – 3)2 + (y – 3)2 = 4; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$; в) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{36} = 1$; г) y2 = – 8x.
6	а) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$; б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; в) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; г) $y^2 = 4x$.	21	а) (x + 1)2 + (y – 1)2 = 16; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$; в) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$; г) x2 = 9y.
7	а) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$; б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; в) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$; г) $y^2 = 2x$.	22	а) (x – 1)2 + (y + 2)2 = 36; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$; в) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$; г) x2 = 7y.
8	а) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 49$; б) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$; в) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$;	23	а) (x + 2)2 + (y – 4)2 = 49; б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1$; в) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$;

	г) $y^2 = 6x$.		г) x2 = 5y.
9	а) $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 9$; б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$; в) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$; г) $y^2 = x$.	24	а) (x – 4)2 + (y + 4)2 = 9; б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$; в) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{36} = 1$; г) x2 = 16y.
10	а) $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 4$; б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; в) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{9} = 1$; г) $y^2 = 8x$.	25	а) (x + 1)2 + (y – 5)2 = 4; б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$; в) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{49} = 1$; г) x2 = 3y.
11	а) $(x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 16$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$; в) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$; г) $y^2 = -9x$.	26	а) (x – 6)2 + (y + 5)2 = 16; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$; в) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{36} = 1$; г) x2 = 4y.
12	а) $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 1$; б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$; в) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$; г) $y^2 = -7x$.	27	а) (x + 5)2 + (y – 1)2 = 1; б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$; в) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} = 1$; г) x2 = 2y.
13	а) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$; б) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$; в) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$; г) $y^2 = -5x$.	28	а) (x – 3)2 + (y + 1)2 = 25; б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$; в) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$; г) x2 = 6y.
14	а) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$; б) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$; в) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$; г) $y^2 = -16x$.	29	а) (x – 2)2 + (y – 3)2 = 36; б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} = 1$; в) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{36} = 1$; г) x2 = y.
15	а) $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 49$; б) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1$; в) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$;	30	а) (x + 4)2 + (y + 2)2 = 49; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{64} = 1$;

	г) $y^2 = -3x$.		в) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$; г) x2 = 8y.

Тақырып 14-15
Екінші ретті беттер

Дәрістің мақсаты:

1. Екінші ретті беттермен танысу.
2. Теориялық мағлұматтарды есептерді шығарғанда қолдану дағдысын қалыптастыру.

Қарастырылатын сұрақтар:

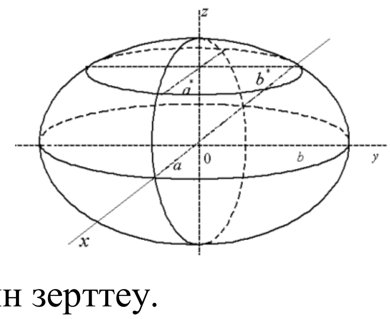
1. Эллипсоид.
2. Гиперболоидтар.
3. Параболоидтар.
4. Екінші ретті конус.
5. Екінші ретті цилиндрлер.

1. Эллипсоид

Қандай-да бір декартты тікбұрышты координаталар жүйесінде келесі түрде анықталатын бет эллипсоид деп аталады.

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \qquad (1)$$

(1) теңдеуі эллипсоидтың канондық теңдеуі деп аталады.



Эллипсоидтың формасын зерттеу.

(1) теңдеуіне X, Y, Z айнымалылары тек екінші дәрежеде кіреді. Сондықтан да, егер $M(X,Y,Z)$ нүктесі эллипсоидқа тиісті болса, онда $M_1(-X,Y,Z)$, $M_2(X,-Y,Z)$, $M_3(X,Y,-Z)$, $M_4(-X,-Y,Z)$, $M_5(X,-Y,-Z)$, $M_6(-X,Y,-Z)$, $M_7(-X,-Y,-Z)$ нүктелері де эллипсоидта жатады. Демек, эллипсоид барлық координаталық жазықтықтарға қатысты, барлық координаталық осьтерге қатысты симметриялы орналасқан. Координаталар бас нүктесі эллипсоидтың симметрия центрі, координата осьтері – симметрия осьтері, координаталық жазықтықтар – симметрия жазықтықтары деп аталады. Эллипсоидтың симметрия осьтерімен

қиылысу нүктелері эллипсоидтың төбелері деп аталады. Эллипсоидтың алты төбесі бар: $A_1(a;0;0)$, $A_2(-a;0;0)$, $B_1(0;b;0)$, $B_2(0;-b;0)$, $C_1(0;0;c)$, $C_2(0;0;-c)$.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоидтың теңдеуінен $|x|<a;|y|<b;|z|<c$ екендігі шығады. Бұл эллипсоидтың $x=a$, $x=-a$, $y=b$, $y=-b$, $z=c$, $z=-c$ жазықтықтарымен шектелген тікбұрышты параллелепипедтің ішінде орналасқандығын көрсетеді. Параллелепипедтің әрбір жағының эллипсоидпен ортақ тек қана бір нүктесі бар- ол эллипсоидтың төбелері болып табылады.

Эллипсоидтың симметрия жазықтықтарымен қималарын табамыз.

zOy жазықтығымен қимасы

$$\left.\begin{matrix}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\\ x=0\end{matrix}\right\}\quad \text{немесе}\quad \left.\begin{matrix}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\\ x=0\end{matrix}\right\}$$

xOz - жазықтығымен қимасы

$$\left.\begin{matrix}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\\ y=0\end{matrix}\right\}\quad \text{немесе}\quad \left.\begin{matrix}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1;\\ y=0\end{matrix}\right\}$$

xOy - жазықтығымен қимасы

$$\left.\begin{matrix}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\\ z=0\end{matrix}\right\}\quad \text{немесе}\quad \left.\begin{matrix}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\\ z=0\end{matrix}\right\}$$

Эллипсоидты координаталық жазықтықтармен қиғанда эллипстер пайда болды. Енді эллипсоидты координаталық жазықтықтарға параллель жазықтықтармен қиямыз. XOZ жазықтығына параллель жазықтықпен қимасын табамыз:

$$\left.\begin{matrix}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\\ y=h\end{matrix}\right\}\quad \text{немесе}\quad \left.\begin{matrix}\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}=1;\\ y=h\end{matrix}\right\}$$

$|h|>b$ болғанда қимада осьтері Ox және Oz осьтеріне параллель эллипс шығады; $|h|=b$ болғанда – нүкте (эллипсоидтың төбесі); $|h|<b$ болғанда – жорамал эллипс болады.

Егер эллипсоидта $a=b=c$, онда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1 \qquad \text{немесеили} \qquad x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Центрі координаталар бас нүктесінде орналасқан, радиусы a тең сфера.

2.Гиперболидтар

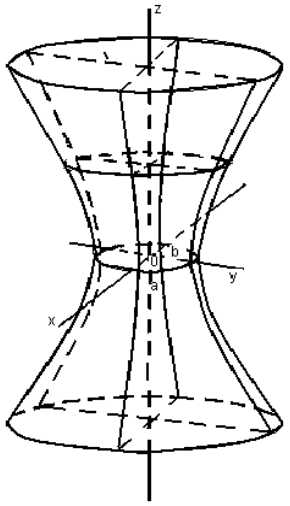
Гиперболоидтың екі түрі бар: бірқуысты және екіқуысты. Қандай-да бір декартты тікбұрышты координаталар жүйесінде келесі түрде анықталатын бет бірқуысты гиперболоид деп аталады.

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1 \qquad (2)$$

Қандай-да бір декартты тікбұрышты координаталар жүйесінде келесі түрде анықталатын бет екіқуысты гиперболоид деп аталады $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=-1$ (3)

Бірқуысты гиперболоидты зерттеу

(2) теңдеуіне x, y және z айнымалылары екінші дәрежеде кіргендіктен, бірқуысты гиперболоид барлық координаталық жазықтықтарға, координаталық осьтерге және координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы. (2) теңдеуінен көрініп тұр, бет Oz осін қимайды, сондықтан да беттің жорамал осі деп аталады. Ox және Oy осьтерінің әрқайсысын бірқуысты гиперболоид сәйкес екі нүктеде қиып өтеді: A_1 (a; 0; 0), A_2 (-a; 0; 0) и B_1 (0; b; 0), B_2 (0; -b; 0). Бірқуысты гиперболоидтың симметрия жазықтықтарымен және оларға параллель жазықтықтармен қимасын қарастырайық.



yOz жазықтығы бірқуысты гиперболоид ты гипербола бойымен қиып өтеді.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;\\ x=0\end{array}\right\}$$

немесе

$$\left.\begin{array}{l}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;\\ x=0,\end{array}\right\}$$

xOy жазықтығы – эллипс бойымену

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;\\ z=0\end{array}\right\} \qquad \text{немесе} \qquad \left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\\ z=0\end{array}\right\}$$

xOz жазықтығы – гипербола бойымен

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;\\&y=0\end{aligned}\right\}\qquad \text{немесе}\qquad \left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;\\&y=0\end{aligned}\right\}$$

z=h жазықтығы бірқуысты гиперболоидты эллипс бойымен қияды.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;\\&z=h\end{aligned}\right\}\qquad \text{немесе}\qquad \left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{a^2(1+\frac{h^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1+\frac{h^2}{c^2})}=1;\\&z=h,\end{aligned}\right\}$$

x = h жазықтығы бірқуысты гиперболоидты келесі сызық бойымен қияды

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;\\&x=h,\end{aligned}\right\}\qquad \text{немесе}\qquad \left.\begin{aligned}&\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2};\\&x=h,\end{aligned}\right\}$$

немесе

$$\left.\begin{aligned}&\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}=1;\\&x=h.\end{aligned}\right\}$$

Егер $|h|<a$ болса , онда қимада гипербола шығады, нақты осі Oy осіне параллель, ал жорамал осі Oz.осіне параллель. $|h|=a$ болғанда, қимада екі қиылысатын түзулер шығады:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0;\\&x=a;\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}&\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0;\\&x=a,\end{aligned}\right\}$$

немесе

$$\left.\begin{aligned}&\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0;\\&x=a;\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}&\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0;\\&x=a,\end{aligned}\right\}$$

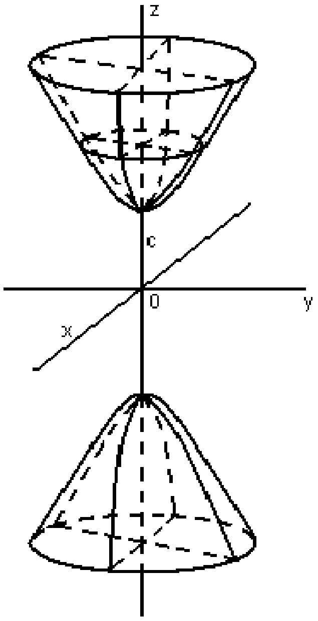
Бұл түзулер бірқуысты гиперболоидтың түзусызықты жасаушылары деп аталады. Егер $|h|>a$ болса, онда қимада нақты осі Oz осіне параллель, ал жорамал осі Ox осіне параллель гипербола шығады.

Екіқуысты гиперболоидты зерттеу

(3) теңдеуіне x, y және z айнымалылары екінші дәрежеде кіргендіктен, екіқуысты гиперболоид барлық координаталық жазықтықтарға, координаталық осьтерге және координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы.

(3) теңдеуінен көрініп тұр, бет OY және OZ остерін қимайды, ал OX осін екіқуысты гиперболоидтың төбелері деп аталатын A_1 (a;0;0) және A_2 (-a;0;0) нүктелерінде қияды.

Екіқуысты гиперболоидтың симметрия жазықтықтарымен және оларға параллель жазықтықтармен қимасын қарастырайық.



XOY жазықтығы екіқуысты гиперболоидты гипербола бойымен қияды

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=1;\\ Z=0\end{array}\right\}\quad \text{немесе} \quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1;\\ Z=0,\end{array}\right\}$$

XOZ - жазықтығы екіқуысты гиперболоидты гипербола бойымен қияды

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=1;\\ Y=0\end{array}\right\}\quad \text{немесе} \quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=1;\\ Y=0,\end{array}\right\}$$

ал X=h –жазықтығы келесі сызық бойымен қияды

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=1;\\ X=h\end{array}\right\}\quad \text{немесе} \quad \left.\begin{array}{l}-\dfrac{Y^2}{b^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{a^2};\\ X=h.\end{array}\right\}$$

Егер $|h|$<a, онда $\frac{h^2}{a^2}$<1 және 1-$\frac{h^2}{a^2}$>0. Демек, қимада жорамал эллипс шығады, ендеше жазықтық бетті қимайды.

Егер $|h|$=a, онда 1-$\frac{h^2}{a^2}$=0. Демек

$$\left.\begin{aligned}&\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0;\\&X=0\end{aligned}\right\}$$

Ендеше, жазықтық бетті екіқуысты гиперболоидтың төбесінде жанайды.
Егер $|h|$>a, онда сызықтың теңдеуін келесі түрде жазуға болады

$$\left.\begin{aligned}&\frac{Y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}+\frac{Z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}=1;\\&X=h.\end{aligned}\right\}$$

Қимада симметрия осьтері OY және OZ осьтеріне параллель болатын, ал жарты осьтері $|h|$ артқан сайын артатын эллипс аламыз. Z=h жазықтығы екіқуысты гиперболоидты келесі сызықпен қияды

$$\left.\begin{aligned}&\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1;\\&X=h\end{aligned}\right\}$$

немесе

$$\left.\begin{aligned}&\frac{X^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{a^2}\right)}-\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{a^2}\right)}=1;\\&X=h.\end{aligned}\right\}$$

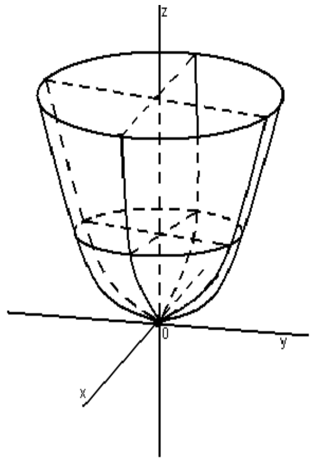
Қимада нақты осі OX осіне параллель болатын гипербола шығады.

Тура сол сияқты, Y=h жазықтығы екіқуысты гиперболоидты нақты осі OX осіне параллель болатын гипербола бойымен қияды:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{X^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{a^2}\right)}-\frac{Z^2}{c^2\left(1+\frac{h^2}{a^2}\right)}=1;\\&Y=h.\end{aligned}\right\}$$

2. Параболоидтар

$\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}=2Z$; (4) теңдеуімен анықталатын бет эллипстік параболоид деп аталады.



Бетті қималар әдісімен зерттейміз.
X және Y айнымалылары беттің теңдеуіне екінші дәрежеде, ал Z бірінші дәрежеде болғандықтан, (4) теңдеуімен анықталатын эллипстік параболоид XOZ және YOZ жазықтықтарына қатысты симметриялы. Ал OZ осі эллипстік параболоидтың симметрия осі болады, ол бетті тек қана координаталар бас нүктесінде қиып өтеді. Координаталар басы эллипстік параболоидтың төбесі деп аталады.

X=0 жазықтығы эллипстік параболоидты парабола бойымен қияды.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}=2Z;\\ &X=0 \end{aligned}\right\} \quad \text{немесе} \quad \left.\begin{aligned} &Y^2=2qZ;\\ &X=0, \end{aligned}\right\}$$

Y=0 жазықтығы – парабола бойымен қияды

$$\left.\begin{aligned} &\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}=2Z;\\ &Y=0 \end{aligned}\right\} \quad \text{немесе} \quad \left.\begin{aligned} &X^2=2pZ;\\ &Y=0, \end{aligned}\right\}$$

Демек, p және q –эллипстік параболоидты оның симметрия осьтерімен қиылысуынан шыққан, параболаның параметрлері. Z=h жазықтығы эллипстік параболоидты келесі сызық бойымен қияды

$$\left.\begin{aligned} &\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}=2Z;\\ &Z=h \end{aligned}\right\} \quad \text{немесе} \quad \left.\begin{aligned} &\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}=2h;\\ &Z=h \end{aligned}\right\}$$

Егер h>0, онда қимада эллипс шығады

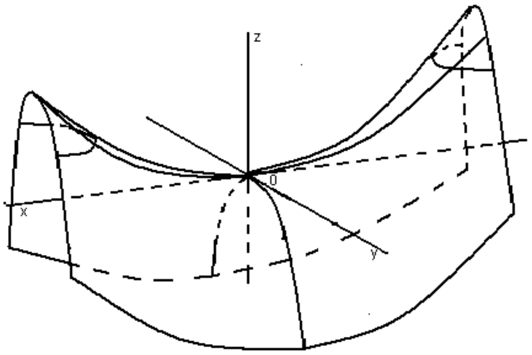
$$\left.\begin{aligned} &\frac{X^2}{2ph}+\frac{Y^2}{2qh}=1;\\ &Z=h \end{aligned}\right\}$$

h=0 болғанда қимада нүкте шығады. Демек, беттің XOY жазықтығымен бір ғана ортақ нүктесі бар- координаталар бас нүктесі. Егер h<0, онда шарт бойынша p>0 және q>0 болғандықтан, қимада жорамал эллипс шығады. Демек, бет XOY жазықтығының бір жағында орналасқан.

Гиперболалық параболоид

$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,$ (5) теңдеуімен анықталатын бет гиперболалық параболоид деп аталады.

мұндағы p>0; q>0.



Бетті қималар әдісімен зерттейміз.

X және Y айнымалылары беттің теңдеуіне екінші дәрежеде, ал Z бірінші дәрежеде болғандықтан , (5) теңдеуімен анықталатын гиперболалық параболоид XOZ және YOZ жазықтықтарына қатысты симметриялы. Ал OZ осі гиперболалық параболоидтың симметрия осі болады, ол бетті тек қана координаталар бас нүктесінде қиып өтеді. Координаталар басы гиперболалық параболоидтың төбесі деп аталады.

y=0 жазықтығы гиперболалық параболоидты парабола бойымен қиып өтеді

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z;\\&y=0\end{aligned}\right\} \quad \text{немесе} \quad \left.\begin{aligned}&x^2=2pz;\\&y=0,\end{aligned}\right\}$$

x=0 – жазықтығы гиперболалық параболоидты парабола бойымен қиып өтеді

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z;\\&x=0\end{aligned}\right\} \quad \text{немесе} \quad \left.\begin{aligned}&y^2=-2qz;\\&x=0.\end{aligned}\right\}$$

Демек, *p және q* – гиперболалық параболоидтың симметрия жазықтықтарымен қиылысуынан шыққан параболалардың параметрлері.

z=h жазықтығымен гиперболалық параболоидты қиғанда келесі сызық аламыз

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z;\\&z=h\end{aligned}\right\} \quad \text{немесе} \quad \left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2h;\\&z=h\end{aligned}\right\}$$

Егер *h>0,* онда қимада центрі (0, 0, h) нүктесінде болатын, ал нақты осі *Ox* осіне параллель болатын гипербола шығады. *h=0* болғанда, қимада екі түзу пайда болады:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0;\\ z=0;\end{array}\right\} \quad \text{немесе} \quad \left.\begin{array}{l}\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0;\\ z=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0;\\ z=0;\end{array}\right\} \quad \text{немесе} \quad \left.\begin{array}{l}\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0;\\ z=0,\end{array}\right\}$$

Бұл түзулер гиперболалық параболоидтың түзусызықты жасаушылары деп аталады. Егер $h<0$ болса, онда қимада осі Оу осіне параллель болатын гипербола шығады.

Гиперболалық параболоидтың yOz жазықтығына параллель жазықтықпен қимасын табамыз.

x=h жазықтығымен қимасында парабола аламыз

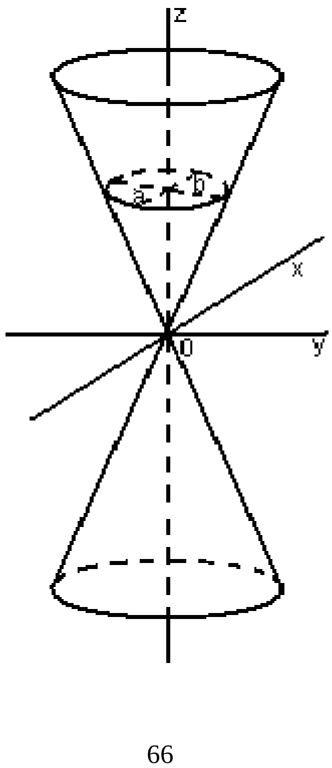
$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\\ x=h\end{array}\right\} \quad \text{немесе} \quad \left.\begin{array}{l}y^2=-2q(z-\frac{h^2}{2p});\\ x=h,\end{array}\right\}$$

Параболаның симметрия осі ось *Oz* осіне параллель, ал төбесі ($h;\ 0;\ \frac{h^2}{2p}$). орналасқан. Параболаның тармақтары төмен қарай бағытталған.

Гиперболалық параболоидты xOz жазықтығына параллель жазықтықпен қиғанда осылайша қайталанады. .

4. Конус второго порядка

$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$ (6) теңдеуімен анықталатын бет екінші ретті конус деп аталады.



Беттің теңдеуіне X,Y,Z айнымалылары екінші дәрежеде кіретіндіктен, екінші ретті конус барлық үш координаталық жазықтықтарға және координаталық осьтерге қатысты симметриялы. Координаталар бас нүктесі беттің симметрия центрі болады. Ол екінші ретті конустың төбесі деп аталады.

Беттің симметрия жазықтықтарымен қимасын табамыз. Екінші ретті конусты yOz және xOz жазықтықтарымен қиғанда, қимада өзара қиылысатын екі түзу шығады.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;\\ x=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;\\ y=0\end{array}\right\}\ \text{немесе}\ \left.\begin{array}{l}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;\\ x=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;\\ y=0.\end{array}\right\}$$

Екінші ретті конустың xOy жазықтығымен бір ғана ортақ нүктесі бар – ол координаталар бас нүктесі. Бұл нүкте екінші ретті конустың төбесі деп аталады. z=h жазықтығы екінші ретті конусты эллипс бойымен қияды

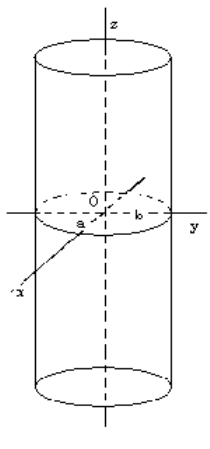
$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;\\ z=h\end{array}\right\}\qquad \text{немесе}\qquad \left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{\frac{h^2a^2}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{h^2b^2}{c^2}}=1;\\ z=h,\end{array}\right\}$$

Эллипстің жарты осьтері $|h|$ артқан сайын артады.

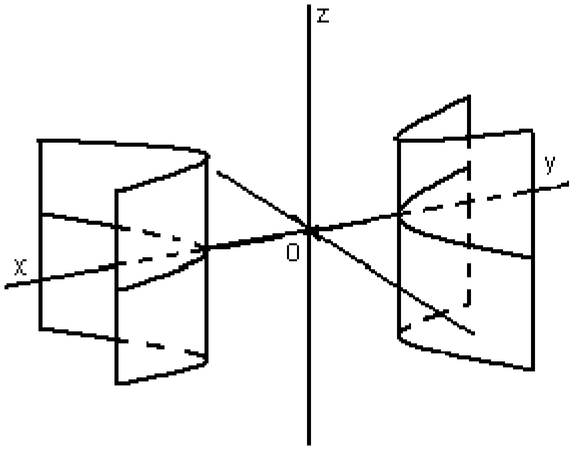
5. Цилиндрлік беттер

Цилиндрлер деп – шеңбер, эллипс, гипербола, парабола нүктелерінен солардың жазықтықтарына перпендикуляр болып өтетін түзу сызықтардың үздіксіз қозғалысынан шығатын екінші ретті беттер. Бұл шеңбер, эллипс, гипербола және парабола цилиндрлердің бағыттаушылары деп аталады, ал цилиндрлердің беттерінде жатқан түзулер олардың жасаушылары деп аталады. Екінші ретті цилиндрлердің үш типі бар:

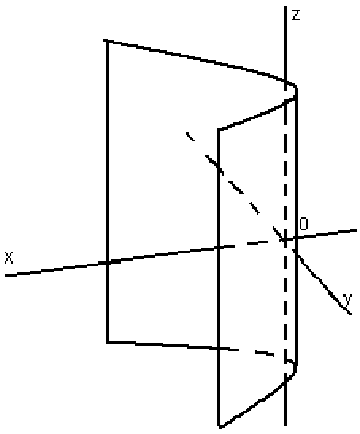
1) эллипстік цилиндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$ (7)



2) гиперболалық цилиндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$ (8)



3) параболалық цилиндр $y^2 = 2px.$ (8)



Өзін-өзі тексеру үшін сұрақтар:

1. Қандай бет эллипсоид деп аталады?
2. Эллипсоидтың төбелері қалай анықталады?
3. Бірқуысты гиперболоидтың канондық теңдеуін жазыңыз.
4. Екіқуысты гиперболоидтың канондық теңдеуін жазыңыз.
5. Бірқуысты гиперболоидтың мойын эллипсі қалай табылады?
6. Эллипстік параболоидтың канондық теңдеуін жазыңыз.
7. Гиперболалық параболоидтың канондық теңдеуін жазыңыз.
8. Екінші ретті конустың канондық теңдеуін жазыңыз.
9. Екінші ретті цилиндрлердің классификациясын атаңыз.

Жаттығулар:

1. Үш белгісізі бар екінші ретті теңдеуді канондық турге келтіру және беттін түрін анықтау.

1. $2x^2 - 4y^2 - z^2 - 6x + 8y + 1 = 0$;
2. $x^2 + 3y^2 - z^2 - 6y - z + 1 = 0$;
3. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 4y - 6z = 0$;
4. $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = 0$;
5. $z^2 - 3x - 4y - 5 = 0$;

6. $x^2 + y^2 + 2xy - z + 1 = 0$;

7. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 18z - 14 = 0$;

8. $2xy + 2x + 2y + 2z - 1 = 0$;

9. $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 2z - 1 = 0$;

10. $x^2 + 4y^2 - z^2 - 10x - 16y + 6z + 16 = 0$;

11. $3x^2 + 6x - 8y + 6z - 7 = 0$;

12. $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 4z = 0$;

13. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;

14. $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;

15. $3x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 6x + 4y + 4z + 3 = 0$;

16. $4x^2 - y^2 - 4x + 4y + 1 = 0$;

17. $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$;

18. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y - 10z = 0$;

19. $x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0$;

20. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$;

21. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$;

22. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0$;

23. $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 6yz + 4x - 6y + 2z - 5 = 0$;

24. $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$.

Өзін-өзі тексеру үшін тест:

1.1. A(-3 ;4) және B(-2;2) нүктелерінің ара қашықтығын анықтаңыз:
A)13
B)3
C)4
D)10
E)$\sqrt{5}$
F)$5/\sqrt{5}$
G)25
H)5

1.2. A(3;-4) және B(-3;4) нүктелерінің ара қашықтығын анықтаңыз:
A)13
B)3
C)4
D)10
E)$\sqrt{5}$
F) $\sqrt{100}$
G)25
H)5

1.3. A(-2;2) және B(10;-3) нүктелерінің ара қашықтығын анықтаңыз:
A) 13
B) 3
C) 4
D) 10
E) $\sqrt{169}$
F)26/2
G)10
H)15

2.1. Шаршының A(3;-7) және B(-1;4) сыбайлас екі төбесі берілген. Шаршының ауданын есептеңіз:
A) 137
B) 3
C) 4
D) 10
E) $\sqrt{137}$
F) $(\sqrt{137})^2$
G)134
H)135

2.2 Шаршының A(-5;2) және B(3;1) сыбайлас екі төбесі берілген. Шаршының ауданын есептеңіз:
A) 65

B) 3
C) 4
D) 10

E) $\sqrt{5}$
F)66
G)34
H) $\sqrt{65}$

2.3. Шаршының қарама-қарсы екі төбесі берілген P(3;5) и Q(l ;-3). Осы шаршының ауданын есептеңіз:
A)68
B)50
C)16
D)65
E)34
F) $\sqrt{34}$
G)68/2
H)66

2.4. Шаршының қарама-қарсы екі төбесі берілген P(3;-4) и Q(-3 ;4). Осы шаршының ауданын есептеңіз:
A)68
B)50
C)16
D)65
E)34
F) $\sqrt{50}$
G)100/2
H)25

3.1. Ордината өсінің бойынан N (-8; 13) нүктесіне дейінгі арақашықтығы 17-ге тең болатын M
нүктесін табыңыз:
A)(0; 28)
B)(0; 28) және (0; -2)
C)(0; -2)
D)(0; -28) және (0; 2)
E)(0;28) және (0;2)
F) (-8; 13)
G) (-8; -13)
H) (8; 13)

4.1. Біртекті стерженнің шеткі нүктелері A(3 ;-5) және B(-1;1).Оның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз:
A) (1;2)
B) (-2;10)
C) (1;-2)
D) (-1;2)
E) (3;2)
F) (-3; 2)

G) (3; 0)
H)(0;0)

4.2. Біртекті стерженнің шеткі нүктелері А(-8 ;13) және В (4;7). Оның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз:
A) (1;2)
B) (-2;10)
C) (1;-2)
D) (-1;2)
E) (3;2)
F)(0;0)
G)(-3;2)
H)(-3;-2)

5.1. Үшбұрыштың төбелерінің координаталары берілген А(1;-3), В(3;-5) және С(-5 ;7). Оның қабырғаларының орталарын табыңыздар:
A) (2;-3), (-2; 3), (-1; 4)
B) (-2; 4), (-1; -1), (-2; 2)
C) (3;1), (2;2), (1;4)
D) (2;-4),(-1;1),(-2;2)
E) (2;-4), (-1;1), (2; 2)
F) (-3; 1), (2; 2), (1; 4)
G) (3; -1), (2; 2), (1; 4)
H) (3; 1), (2; 2), (1; -4)

5.2. Үшбұрыштың төбелерінің координаталары берілген А(2;3), В(4;-1) және С(0 ;5). Оның қабырғаларының орталарын табыңыздар:
A) (2;-3), (-2; 3), (-1; 4)
B) (-2; 4), (-1; -1), (-2; 2)
C) (3;1), (2;2), (1;4)
D) (2;-4),(-1;1),(-2;2).
E) (2;-4), (-1;1), (2; 2)
F) (-2; -3), (-2; 3), (-1; 4)
G) (2; 3), (-2; 3), (-1; 4)
H) (2; -3), (-2; 3), (-1; -4)

5.3. Параллелограмның екі сыбайлас төбесінің координаталары берілген. А(-3;5), В(1,7) және
оның диагональдарының қиылысу нүктесі М(1 ;1). Басқа екі төбесін анықтаңыз:
A)(5; -3), (1; -5)
B)(5; 3), (1; -5)
C)(-5; -3), (1; -5)
D)(5;-3), (-1;-5)
E)(5;3), (1;5)
F) (-5; 3), (1; 5)
G) (5; 3), (-1; 5)
H) (5; -3), (-1; 5)

5.4. Параллелограмның екі сыбайлас төбесінің координаталары берілген. А(3; -5), В(5; -3) және оның диагональдарының қиылысу нүктесі М(1 ;-1). Басқа екі төбесін анықтаңыз:
A) (1; -3), (1; 3)

B) (1; 3), (1; -3)
C) (-5; -3), (1; -5)
D) (5; -3), (-1; -5)
E) (-1; 3), (-3; 1)
F) (-1; -3), (1; 3)
G) (-1; 3), (1; 3)
H) (1; 3), (1; 3)

6.1. Үшбұрыштың A(1;4), B(3;-9) және C(-5;2)төбелері берілген. B төбесінен жүргізілген медиананың ұзындығын табыңыз:
A)68
B)50
C)16
D)65
E)13
F) $\sqrt{34}$
G)26/2
H)66

6.2. Үшбұрыштың A(-2;-1), B(3;5) және C(-4;1)төбелері берілген. B төбесінен жүргізілген медиананың ұзындығын табыңыз:
A) 13
B) 8
C) 25
D) $\sqrt{68}$
E) $\sqrt{61}$
F) $\sqrt{34}$
G)68/2
H)66

7.1. A(1;-3) және B(4;3) нүктелерімен шектелген кесінді тең үш бөлікке бөлінген. Бөлу нүктелерінің координаталарын анықтаңыз:
A) (4; 3), (6; 7)
B) (2; -1), (3; 1)
C) (4; -3), (0; 7)
D) (8;1),(1;2)
E) (7; 3), (11; 4)
F) (-2; -1), (3; 1)
G) (2; -1), (-3; 1)
H) (2; -1), (3; -1)

7.2. Шеткі нүктелері A және B болатын кесінді P(2;2) и Q(1 ;5) нүктелері арқылы тең үш бөлікке бөлінген. Шеткі A және B нүктелерінің координаталарын табыңыздар:
A) (-3; -1), (0; 8)
B) (3; 1), (0; -8)
C) (3; 1). (0; 8)
D) (3;-1),(0;-8)
E) (3;-1),(0;8)
F) (3; 0), (0; -8)
G) (3; -1), (1; -8)
H) (3; 1), (1; -8)

7.3. Шеткі нүктелері А және В болатын кесінді Q(3; 3) және P(9; 4) нүктелері арқылы тең үш бөлікке бөлінген. Шеткі А және В нүктелерінің координаталарын табыңыздар:
A) (-3; 2), (0; 15)
B) (3; 1), (0; -8)
C) (3; 1), (0; 8)
D) (-3; 2), (15; 5)
E) (3; -1), (15; -5)
F) (-3; 2), (1; 5)
G) (-3; 2), (-5; 5)
H) (-3; 2), (15;-5) F) (-3; 2), (1; 5)
G) (-3; 2), (-5; 5)
H) (-3; 2), (15;-5)

8.1. Төбелері А(2;-3), В(3;2) және С(-2;5) болатын үшбұрыштың ауданын табыңыз:
A) 12 ш.бірл
B) 11 ш.бірл
C) 10 ш.бірл
D) 7 ш.бірл.
E)14 ш.бірл
F) $\sqrt{196}$ ш.бірл
G) 28/2 ш.бірл
H) 11 ш.бірл

8.2. Төбелері А(-3;2), В(5;-2) және С(1;3) болатын үшбұрыштың ауданын табыңыз:
A) 12 ш.бірл
B) 13 ш.бірл
C) 14 ш.бірл
D) 15 ш.бірл
E) 25 ш.бірл
F) $\sqrt{144}$ ш.бірл
G) 17 ш.бірл
H) 16 ш.бірл

9.1. А(-1; 2; 1), В(2; 1; -3), С(-3; 0; -5) берілген. АВСД параллелограмм болатындай Д нүктесін таңдап алу керек:
A) (-6; 1; -1)
B) (9;-4;3)
C) (9;-5;6)
D) (3;4;20)
E) (-1;5;6)
F) (-6; 1; -1)
G) (6; 1; 1)
H) (9; 4; 3)

9.2. А(3;-4; 7), В(-5; 3; -2), С(1; 2; -3) берілген. АВСД параллелограмм болатындай Д нүктесін таңдап алу керек:
A) (-6; 1; -1).
B) (9;-4;3)
C) (9;-5;6)
D) (3;4;20
E) (-1;5;6)

F) (3;- 4; 20)
G) (6; 1; -1)
H) (9; 5; 6)

10.1. C(2;2;4) нүктесі AB кесіндісін λ=2/3 қатынаста бөледі.Егер A(-2;4;0) болса, B нүктесінің координаталарын табу керек:
A) (8; -1; 10)
B) (-8; -1; 10)
C) (-8; -1; -10)
D) (8; -1; -10)
E) (-8,1;-10).
F) (-8; 1; -1)
G) (-8; 1; 0)
H) (0; 1; -10)

10.2. C(2; 4; 1) нүктесі AB кесіндісін λ=1/3 қатынаста бөледі.Егер A(1; 4; 2) болса, B нүктесінің координаталарын табу керек:
A) (-5; 4; -2)
B) (5; 4; -2)
C) (-5; -1; -10)
D) (-5; -1; -2)
E) (-8; 1; 2)
F) (8; 1; 2)
G) (5; -4; -2)
H) (-5; -4; -2)

11.1. Егер A(3;4;-1), B(0; 1;2) болса, AB біртекті стерженнің ауырлық центрін табу керек:
A) (3; 5/2; 1/2)
B) (-3, 5/2;1/2)
C) (3/2;5/2;1/2)
D) (3;5; 1)
E) (-3;5;1)
F) $(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{1}{2})$
G) $(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$
H) $(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}; \frac{1}{2})$

11.2. Егер A(1;-1;3), B(3;-5;-9) болса, AB біртекті стерженнің ауырлық центрін табу керек:
A) (3;1;2)
B) (4;2;1)
C) (-3;4;2)
D) (3;5;6)
E) (2;-3;-3)
F) (-2; -3; -3)
G) (2; 3; 3)
H) (2; 3; -3)

12.1. A(2;-1;4), B(3;2;-6), C(-5;0;2) үшбұрыштың төбелері берілген. A төбесінен жүргізілген медиананың ұзындығын табу керек:
A) 13
B) 8
C) 25
D) $\sqrt{68}$
E) 7
F) $\sqrt{49}$
G) $\sqrt{48}$
H) 8

12.2. Үшбұрыштың төбелері берілген: A(3;2;-5), B(1;-4;3), C(-3;0;1). A төбесінен жүргізілген үшбұрыштың медианасының ұзындығын табу керек:
A) 13
B) 8
C) 25
D) $\sqrt{68}$
E) 9
F) $\sqrt{49}$
G) $\sqrt{48}$
H)8

13.1. ABCD параллелограммның үш төбесі берілген A(3;-1;2), B(1 ;2;-4) және C(-1 ;1 ;2). B төбесіне қарама- қарсы орналасқан D төбесінің координатасын табу керек:
A) (1;-2;-8)
B) (-1:2; 8)
C) (-1;-2;-8)
D) (1;-2;8)
E) (-1;-2;8)
F) (0; -2; 8)
G) (-1; 0; 8)
H) (-1; -2; 0)

14.1. A(1;-2;-3) , B(3;1;-9) нүктелері берілген. A мен B арасындағы қашықтықты табу керек:
A) 49/7

B) 7
C) 4
D) 5
E) 2
F) 8
G) 0
H) 15

14.2. A(2;-3;0) , B(-1;1;12) нүктелері берілген. A мен B арасындағы қашықтықты табу керек:
A) 13
B) 8
C) 25
D) $\sqrt{169}$
E) $\sqrt{61}$

F) 26/2
G) 5
H) 169

15.1. Полярлық координаторлар жүйесінде берілген A (5, $\frac{\pi}{2}$) нүктесінің декарттық координаталарын табу керек:
A) (2;2$\sqrt{3}$)
B) (-2;2$\sqrt{3}$)
C) ($\sqrt{3}$;1)
D) (0;5)
E) $\left(3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$
E) $\left(3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$
F) $\left(-3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$
G) (0;-5)
H) (5;0)

15.2. Полярлық координаторлар жүйесінде берілген A (4; π/3) нүктесінің декарттық координаталарын табу керек:
A) (2;2$\sqrt{3}$)
B) (-2;2$\sqrt{3}$)
C) ($\sqrt{3}$;1)
D) (0;5)
E) $\left(3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$
F) (-2; 2$\sqrt{3}$)
G) (0; -5)
H) (5; 5)

16.1. $x^2+y^2=8$, x-y=0 екі сызықтың қиылысу нүктесін табыңыз:
A) (1; -1), (1; 1)
B) (2; 2), (-2; -2)
C) (2; 2)
D) (-2; 2), (2;-2)
E) (-2;-2)
F) $x_1+x_2=0$
G) $y_1+y_2=0$
H) (0;0)

16.2. $y^2=2x$, x-y=0 екі сызықтың қиылысу нүктесін табыңыз:
A) (0; 0), (2; 2)
B) (4; 4), (-4; -4)
C) (2; 2), (-2; -2)
D) (-4; 4), (4;-4)
E) (1; 1)
F) (0;0)
G) $y_1+y_2=2$
H) $x_1+x_2=2$

17.1. 3x-4y+5=0 және 6x-8y-13=0 түзулер арасындағы қашықтықты табу керек:
A) 2
B) 3
C) 3,2

D) 2,3
E) 3,3
F) 2,1
G) 2,0
H) 3,1

17.2. 5x-12y+26=0 және 5x-12y-13=0 түзулер арасындағы қашықтықты табу керек.
A) 13
B) 8
C) 3
D) $\sqrt{68}$
E) $\sqrt{61}$
F) $\sqrt{9}$
G) 0
H) 5

18.1. 3x-2y-4=0 және 2x-y-3=0 түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өтетін, ординат осіне параллель болатын түзудің теңдеуін табу керек:
A) x=2,5

B) x=2
C) 2-x=0
D) x=3
E) x=2,8
F) x-2=0
G) x=-2
H) x=8

18.2. 4x+3y-5=0, x-3y+10=0 түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өтетін, ординат осіне параллель болатын түзудің теңдеуін табу керек:
A) x= -1

B) x=2
C) x=8
D) x+1=0
E) x=-2
F) x=1
G) -x-1=0
H) -x+1=0
E) x= -2

19.1. 4x-5y+2=0 түзуіне перпендикуляр және A(-1;3) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін табу керек:
A) -5x-4y+7=0
B) 5x+4y=7

C) 4x+y-16-0
D) 4x+y+16=0

E) 5x+4y-7=0
F) 4x+y+6=0
G) 4x+y+5=0
H) 5x+4y=-7

19.2. x+3y+4=0 түзуіне перпендикуляр және А(2;1) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін табу керек:
A) 3x-y-1=0
B) 3x-y-5=0
C) 3x-y+1=0
D) 3x-y=0

E) 3x-y+3=0
F) -3x+y+5=0

G) 3x-y-3=0
H) 3x-y=5

19.3. 3x+2y-7=0 түзуіне перпендикуляр және А(1;3) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін табу керек:
A) 2x-3y+5=0
B) 2x-3y-4=0
C) 2x-3y=0
D) 2x-3y+7=0

E) 2x-3y+1=0

F) 2x-3y-1=0

G) 2x+3y+1=0
H) 2x-3y=-7

20.1. 4x-5y+2=0 түзуіне параллель және А(-1;3) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін табу керек:
A) -4x+5y-19=0
B) 4x-5y=-19
C) -4x+5y-12=0

D) 4x-5y+19=0
E) -4x+5y-13=0
F) 4x+5y-13=0
G) 4x+5y-19=0
H) 4x+5y+19=0

20.2. x+3y+4=0 түзуіне параллель және А(2;1) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін табу керек:
A) x+3y-5=0
B) 3x+2y-9=0
C) 2x+3y+1=0

D) 2x+y=0
E) 3x+2y-1=0
F) x+3y=5
G) –x-3y+5=0
H) y=-2x

20.3. 3x+2y-7=0 түзуіне параллель және A(1;3) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін табу керек:
A) x+3y-5=0
B) 3x+2y-9=0
C) 2x+3y+1=0

D) 2x+y=0
E) 3x+2y-1=0
F) 3x+2y=9
G) y=-2x
H) 2y-9=- 3x

21.1.Тікбұрышты координаталар жүйесінде берілген түзудің теңдеуін таңдап алу керек:
A) a b = b a
B) A $(x - x_0) + B (y - y_0) = 0$
C) $x^2 + y^2 = a^2$
D) $x^2 - y^2 = 1$
E) xy = 1
F) $(x-x_0)^2+y^2=a^2$
G) $x=y^2$
H) y=2/x

21.2. Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін табу керек:
A) Ax+By+C=0
B) y=kx+в
C) $y-y_0=k(x-x_0)$
D) $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
E) $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$
F) $x^2+y^2=a^2$
G) $x=y^2$
H) $\frac{\tilde{o}}{\grave{a}}+\frac{\acute{o}}{\hat{a}}=0$

22.1. Бұрыштық коэффициенті бар түзудің теңдеуін табу керек:
A) Ax+By+C=0
B) y=kx+в
C) $y-y_0=k(x-x_0)$
D) $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

E) $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$

F) $\frac{\tilde{o}}{\grave{a}}+\frac{\acute{o}}{\hat{a}}=0$

G) $x=y^2$

H) $x^2+y^2=a^2$

22.2. Түзудің кесінділік теңдеуін табу керек:

A) $Ax+By+C=0$

B) $y=kx+в$

C) $y-y_0=k(x-x_0)$

D) $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

E) $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$

F) $\frac{\tilde{o}}{\grave{a}}+\frac{\acute{o}}{\hat{a}}=0$

G) $x^2+y^2=a^2$

H) $y=kx$

23.1. Түзулердің параллельдік шартын табу керек:

A) $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

B) $A_1B_1 + A_2B_2 = 0$

C) $A_1B_2 – A_2B_1 = 0$

D) $A_1 = B_1A_2$

E) $A_2 = B_2A_1$

F) $A_1A_2+B_1B_2=1$

G) $A_1-B_1A_2 =0$

H) $A_{2+}B_2A_1=0$

24.1. A (-1 ; 6) , B (-3 ; 4) нүктелері арқылы өтетін түзуге перпендикуляр түзудің бұрыштық коэффициентін табу керек:

A) $k+1=0$

B) 3

C) $\frac{1}{5}$

D) -1

E) $\frac{3}{2}$

F) $-k-1=0$

G) 1

H) $-\frac{2}{3}$

24.2. A (2;-5) , B (3;2) нүктелері арқылы өтетін түзуге параллель түзудің бұрыштық коэффициентін табу керек:

A) $-\frac{2}{3}$

B) 3

C) 7
D) 2
E) $\frac{3}{2}$
F) $\sqrt{49}$
G) -7
H) 0

24.3. A (-3;1), B (7;8) нүктелері арқылы өтетін түзуге параллель түзудің бұрыштық коэффициентін табу керек:
A) 0,7
B) 3
C) $\frac{1}{5}$
D) 2
E) $\frac{3}{2}$
F) -0,7
G) $\frac{7}{10}$
H) -$\frac{7}{10}$

25.1. x – 5y + 4 = 0 түзуіне перпендикуляр болатын, түзудің бұрыштық коэффициентін табу керек:
A) k+5=0
B) 3
C) $\frac{1}{5}$
D) 2
E) -5
F) 5
G) $-\frac{2}{3}$
H) - $\frac{1}{5}$

25.2. 3x –2y -14 = 0 түзуіне перпендикуляр болатын, түзудің бұрыштық коэффициентін табу керек:
A) $-\frac{2}{3}$
B) 3
C) $-\frac{1}{5}$
D) 2
E) $\frac{3}{2}$
F) 0

G) $\frac{2}{3}$

H) $-\frac{20}{30}$

25.3. 5x +y +3 = 0 түзуіне перпендикуляр болатын, түзудің бұрыштық коэффициентін табу керек:

A) $-\frac{2}{3}$

B) 3

C) $\frac{1}{5}$

D) 2

E) $\frac{3}{2}$

F) k-$\frac{1}{5}$=0

G) 0

H) k=$\frac{1}{5}$

26.1. x – 3y + 2 = 0 түзуіне тиісті M (x ; -1) нүктесінің абсциссасын табу керек:

A) x=-5

B) x=2

C) x=8

D) x+5=0

E) x=-2

F) -5-x=0

G) x=1

H) x=9

26.2. x + 3y -31 = 0 түзуіне тиісті M (x ;10) нүктесінің абсциссасын табу керек:

A) x=-1

B) x=2

C) x=8

D) x=1

E) x=-2

F)1-x=0

G) x=0

H) x-1=0

26.3. x + 5y -7 = 0 түзуіне тиісті M (x ; 2) нүктесінің абсциссасын табу керек:

A) x=-3

B) x=2

C) x+3=0

D) x=1

E) x=-2

F) x=0
G) x=8
H) x=3

27.1. OX осінің теңдеуін табу керек:
A) 2x+3=0
B) y=0
C) 2x=0
D) y =5
E) y=x
F) y=2x
G) x=0
H) y-3=0

27.2. OX осіне параллель түзудің теңдеуін табу керек:
A) 2x+3y-5=0
B) x=3
C) y=3
D) 2x+3y=0
E) x+y+1=0
F) y=-3
G) y+5=0
H) x-3=0

27.3. OY осіне параллель түзудің теңдеуін табу керек:
A) 2x+3y-5=0
B) x=3
C) x-3=0
D) 2x+3y=0
E) x=6
F) y=6
G) x+y+1=0
H) y=3

28.1. 3x – 4y + 1 = 0 , 2x + 5y – 7 = 0 түзулерінің қиылысу нүктесін табу керек:
A) (1; 1)
B) (1; -1)
C) (-1; 1)
D) (-1; -1)
E) (1; 0)
F) (-1; 0)
G) (0; 0)
H) (1; -6)

28.2. x – 2y + 15 = 0 , 7x + y – 15 = 0 түзулерінің қиылысу нүктесін табу керек:.
A) (1; 1)
B) (1; -1)
C) (-1; 8)
D) (1;8)
E) (1; 0)
F) (-1; -8)
G) (0; 8)

H) (-1; 0)

28.3. $4x + 3y – 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$ түзулерінің қиылысу нүктесін табу керек:
A) (1; 1)
B) (1; -1)
C) (-1; 1)
D) (-1; -3)
E) (-1;3)
F) (0; 1)
G) (1; 0)
H) (0; 0)

29.1. Бұрыштық коэффициенті $k=3$ және $b = 5$ болатын, түздің теңдеуін табу керек:
A) 3x–y–5=0
B)y-5=3x
C) x–3y+5=0
D) 3x–y+5=0
E) x–3y–5=0
F) x+3y+5=0
G) 3x–y=-5
H) 3x+y–5=0

29.2. Бұрыштық коэффициенті $k=\frac{2}{3}$ және $b =3$ болатын, түздің теңдеуін табу керек:
A) 2x–3y=-9
B) 2x–3y+9=0
C) 3x+4y–12=0
D) 2x+y+5=0
E) y+2=0
F) x=3
G) x+3y–2 = 0
H) 2x=3y

29.3. Бұрыштық коэффициенті $k= -\frac{3}{4}$ және $b = 3$ болатын, түздің теңдеуін табу керек:
A) x+3y–2=0
B) 2x–3y+9=0
C) 3x+4y–12=0
D) -3x-4y+12=0
E) y+2=0
F)4y=-3x
G) 3x+4y=12
H) 2x+y+5=0

30.1. $M_1(2; -3)$ және $M_2(3; 2)$ нүктелері арқылы өтетін түздің бұрыштық коэфициентін табу керек:
A) 5
B) 3
C) $-\frac{1}{5}$
D) 2

E) $\frac{3}{2}$

F) 0

G) $\frac{2}{3}$

H) $-\frac{20}{30}$

30.2. M_1(- 3; 1) және M_2(7; 8) нүктелері арқылы өтетін түздің бұрыштық коэфициентін табу керек:

A) $\frac{7}{10}$

B) 3

C) 0,7

D) 2

E) $\frac{3}{2}$

F) $-\frac{2}{3}$

G) 0

H) 5

30.3. M_1(-5;3) және M_2(1;-6) нүктелері арқылы өтетін түздің бұрыштық коэфициентін табу керек:

A) $-\frac{2}{3}$

B) $-\frac{15}{10}$

C) $\frac{1}{5}$

D) 2

E) -1,5

F) $\frac{3}{2}$

G) $-\frac{3}{2}$

H) 3

31.1. P(2; 3) и Q(-1; 0) нүктелері берілген. Q нүктесі арқылы өтетін PQ кесіндісіне перпендикуляр түздің теңдеуін табу керек:

A) 3x+2y+5=0

B) x+y=-1

C) x–y+1=0

D) x+y+1=0

E) x–2y+9=0

F) x–2y-9=0

G)-x-y-1=0

H) x+2y+1=0

31.2. P(2 ; 1) және Q(-1 ; - 1) нүктелері берілген. Q нүктесі арқылы өтетін PQ кесіндісіне перпендикуляр түзудің теңдеуін табу керек:
A) 3x+2y+5=0
B) x+2y+1=0
C) x–y+1=0
D) x+y+1=0
E) x–2y+9=0
F) x–2y-9=0
G) 3x+2y=-5
H) -x–y+1=0

32.1. M_1(-1; 2) және M_2(2; 3) нүктелері арқылы түзу жүргізілген. Осы түзудің Ox осімен қиылысу нүктесін анықтау керек:
A) (1; 0)
B) (2; 0)
C) (3; 0)
D) (-4; 0)
E) (-7; 0)
F) (7;0)
G) (-2;0)
H) (-3;0)

32.2. M_1(-3; 1) және M_2(3; 7) нүктелері арқылы түзу жүргізілген. Осы түзудің Ox осімен қиылысу нүктесін анықтау керек:
A) (1; 0)
B) (2; 0)
C) (3, 0)
D) (-4; 0)
E) (-7; 0)
F) (7;0)
G) (4;0)
H) (0;0)

33.1. A(5;-3) және B(-1;6) берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін құру керек:
A) 2x+3y–9=0
B) -3x-2y+9=0
C) 3x+2y=9
D) 2x+3y–9=0
E) 3x+2y-9=0
F) 2x-3y–9=0
G) 3x-2y–4=0
H) 2x+3y-7=0

33.2. A(2;1) және B(5;3) берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін құру керек:
A) 7x-2y–29=0
B) 5x+y–11=0
C) 2x-3y-11=0
D) x+3y+1=0
E) 2x-3y-1=0
F) 7x-2y+29=0
G) x+3y-1=0
H) -2x+3y+1=0

33.3. A(2;1) және B(3;-4) берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін құру керек:
A) 7x-2y–29=0
B) 5x+y-11=0
C) 2x-3y–11=0
D) x+3y+1=0
E) x-2y–1=0
F) -x+3y+1=0
G) x-2y+1=0
H) -5x-y+11=0

34.1. 5x-y+7=0 және 3x+2y=0 түзулері арасындағы бұрышты табу керек:
A) $\frac{\pi}{4}$
B) $\frac{\pi}{6}$
C) 0
D) $\frac{\pi}{3}$
E) $\frac{\pi}{2}$
F) 45^0
G) - $\frac{\pi}{2}$
H) - $\frac{\pi}{6}$

34.2. 3x-y+5=0 және 2x+y-7=0 түзулері арасындағы бұрышты табу керек:
A) $\frac{\pi}{4}$
B) $\frac{\pi}{3}$
C) $\frac{\pi}{2}$
D) $\frac{\pi}{6}$
E) 0
F) π
G) 45^0
H) $\frac{\pi}{12}$

34.3. 3x-2y-7=0 және 2x+3y-3=0 түзулері арасындағы бұрышты табу керек:
A) $\frac{\pi}{4}$
B) $\frac{\pi}{2}$
C) 0

D) $\frac{\pi}{3}$
E) $\frac{\pi}{6}$
F) 90^0
G) $\frac{\pi}{12}$
H) π

35.1. A(2;-1) нүктесінен 4x+3y+10=0 түзуіне дейінгі ара қашықтықты табу керек.
A) $\sqrt{9}$
B) 5
C) 3
D) 2
E) $\frac{3}{2}$
F) $-\frac{2}{3}$
G) 7
H) 5

35.2. A(-2; 3) нүктесінен 3x-4y-2=0 түзуіне дейінгі ара қашықтықты табу керек.
A) $-\frac{2}{3}$
B) 4
C) $\frac{1}{5}$
D) 2
E) $\frac{3}{2}$
F) $\sqrt{16}$
G) 5
H) 6

35.3 A(1; -2) нүктесінен x-2y-5=0 түзуіне дейінгі ара қашықтықты табу керек.
A) $-\frac{2}{3}$
B) 3
C) 0
D) 2
E) $\frac{3}{2}$
F) 5
G) 6
H) 4

36.1. Координаталар бас нүктесі арқылы өтетін түздің теңдеуін табу керек:
A) Ax+By=0

B) Ax+C=0
C) x+C=0
D) By+C=0
E) y+B=0
F) Ax=-By
G) y=-(A/B)x
H) y=0

37.1. Оу осіне парарллель түзудің теңдеуін табу керек:
A) Ax+By=0
B) Ax+C=0
C) 3x+4y=0
D) By+C=0
E) Y=0
F) x+C=0
G) x=0
H) y=7

37.2. Ох осіне парарллель түзудің теңдеуін табу керек:
A) y+1=0
B) x +4=0
C) x -5=0
D) 3y+1=0
E) 3y+ x =0
F) x +7y - 4=0
G) 3y-1=0
H) x+5=0
****
38.1. Екі түзудің параллельдік шартын көрсетіңіз:
A) $k_1=k_2$
B) $k_1=-k_2$
C) $k_1k_2=1$
D) $k_1k_2=-1$
E) $k_1+k_2=1$
F) $k_1k_2=0$
G) $k_1+k_2=-1$
H) $k_1-k_2=0$

38.2. Екі түзудің перпендикулярлық шартын көрсетіңіз:
A) $k_1=k_2$
B) $k_1=-k_2$
C) $k_1k_2=1$
D) $k_1k_2=-1$
E) $k_1+k_2=1$
F) $k_2=-1/k_1$
G) $k_1+k_2=-1$
H) $k_1=-1/k_2$

39.1. Ax+By+C=0 түзуінің бұрыштық коэффициентін табыңыз:
A) k=-C/A
B) k=-A/B
C) k=C/A

D) k=B/C
E) k=A/B
F) k=A
G) k=B
H) k=C

40.1. Түзудің бұрыштық коэффициенті дегеніміз не
A) Ох осімен жасайтын бұрышының косинусы
B) Ох осімен жасайтын бұрышының котангенсы
C) Ох осімен жасайтын бұрышының тангенсы
D) Ох осімен жасайтын бұрышының секансы
E) Ох осімен жасайтын бұрышының синусы

41.1. 5x-y+3=0 түзуінің бұрыштық коэффициентін табыңыз:
A) $-\frac{2}{3}$
B) 3
C) 5
D) 2
E) $\frac{3}{2}$
F) 25/5
G) 1
H) -5

41.2. 3x-7y+8=0 түзуінің бұрыштық коэффициентін табыңыз:
A) 0,3
B) 1
C) $-\frac{3}{7}$
D) $\frac{3}{7}$
E) $\frac{7}{3}$
F) $-\frac{7}{3}$
G) 5
H) 6

41.3. 3x+7y+1=0 түзуінің бұрыштық коэффициентін табыңыз:
A) 0,3
B) 1
C) $-\frac{3}{7}$
D) $\frac{3}{7}$
E) $\frac{7}{3}$
F) $-\frac{7}{3}$

G) -1
H) 5

42.1. Екі түзу арасындағы бұрыштың формуласын табыңыз:
A) k_1/k_2
B) $-1/k_1$
C) $1/k_2$
D) $k_1k_2=1$
E) $(k_2-k_1)/(1+k_1k_2)$
F) $(k_2+k_1)/(1+k_1k_2)$
G) $(1+k_1k_2) / (k_2-k_1)$
H) $- k_1/k_2$

43.1. Шаршының қабырғасының теңдеуі 3x+4y+4=0, бір төбесінің координатасы (1; 2). Шаршының ауданын табыңыз:
A)3 ш.бірл
B) 16 ш.бірл
C) 2 ш.бірл
D) 25 ш.бірл
E) 9 ш.бірл
F) 25 ш.бірл
G) $\sqrt{81}$ ш.бірл
H) 3 ш.бірл

43.2.Шаршының қабырғасының теңдеуі 3x-4y-2=0, бір төбесінің координатасы (-2;3). Шаршының ауданын табыңыз:
A) 9 ш.бірл
B) 16 ш.бірл
C) 2 ш.бірл
D) 25 ш.бірл
E) 3 ш.бірл
F) $\sqrt{256}$ ш.бірл
G) 15 ш.бірл
H) 25 ш.бірл

44.1. Үшбұрыштың төбелері берілген A(2; 1) , B(-1; 1), C(3; 2). A төбесінен BC қабырғасына жүргізілген биіктіктің теңдеуін құру керек.
A) 4x+3y–11=0
B) x+y+2=0
C) 3x+2y–13=0
D) x–y–2=0
E) x+y+1=0
F) -4x-3y+11=0
G) 3x-2y–13=0
H) 4x+3y+11=0

44.2. Үшбұрыштың төбелері берілген A(2; 1) , B(-1; 1), C(3; 2). B төбесінен AC қабырғасына жүргізілген биіктіктің теңдеуін құру керек.
A) 4x+3y–11=0
B) x+y+2=0

C) 3x+2y–13=0
D) x–y–2=0
E) x+y+1=0
F) x–y+2=0
G) 3x+2y+13=0
H) –x-y-2=0

45.1.Үшбұрыштың төбелері берілген A(3; 2), B(5; -2), C(1; 0). BM мед递ананың теңдеуін құру керек:
A) y=5
B) x+3=0
C) y=0
D) x+y–3=0
E) x–3=0
F) y-3=0
G) x+y=3
H) x=0

45.2. Үшбұрыштың төбелері берілген A(3; 2), B(5; -2), C(1; 0). AN медиананың теңдеуін құру
керек.
A) y=5
B) x+3=0
C) y=0
D) x+y–3=0
E) x–3=0
F) x=3
G) x=0
H) y-5=0

45.3. Үшбұрыштың төбелері берілген A(3; 2), B(5; -2), C(1; 0). CK медиананың теңдеуін құру керек:
A) y=5
B) x+3=0
C) y=0
D) x+y–3=0
E) x–3=0
F) x=0
G) x+y=0
H) y=x

46.1. 3x-4y-12=0 түзуінің координаталық бұрыштан қиып өтетін үшбұрыштың ауданын табу керек.
A) $\sqrt{36}$
B) 3
C) 6
D) 2
E) $\frac{3}{2}$
F) 4

G) $-\frac{2}{3}$
H) 5

46.2. 2x+3y-6=0 түзуінің координаталық бұрыштан қиып өтетін үшбұрыштың ауданын табу керек.
A) $-\frac{2}{3}$
B) 3
C) $\frac{1}{5}$
D) 2
E) $\frac{3}{2}$
F) $\sqrt{9}$
G) 4
H) 5

46.3. 4x-3y+24=0 түзуінің координаталық бұрыштан қиып өтетін үшбұрыштың ауданын табу керек.
A) $-\frac{2}{3}$
B) 3
C) 24
D) 2
E) $\sqrt{576}$
F) 12
G) 22
H) $\frac{3}{2}$

47.1. Үшбұрыштың төбелері берілген A(3; 2), B(5; -2), C(1; 0). AB қабырғасының теңдеуін құру керек:
A) 2x+y–8=0
B) -2x-y+8=0
C) x–y–1=0
D) 2x–y+8=0
E) x–3=0
F) x+2y–1=0
G) 2x+y=8
H) x+y–1=0

47.2. Үшбұрыштың төбелері берілген A(3; 2), B(5; -2), C(1; 0). BC қабырғасының теңдеуін құру керек.
A) 2x+y–8=0
B) x+2y–1=0
C) x–y–1=0
D) 2x–y+8=0
E) x–3=0
F) x+2y=1

G) x=3
H) 2x–y-8=0

47.3. Үшбұрыштың төбелері берілген A(3;2), B(5; -2), C(1; 0). CA қабырғасының теңдеуін құру керек:
A) –x+y+1=0
B) x+2y–1=0
C) x–y–1=0
D) 2x–y+8=0
E) x–y=1
F) x-3=0
G) 2x+y–8=0
H) x+3=0

48.1. Тіктөртбұрыштың екі қабырғасының теңдеулері 3x-2y-5=0, 2x+3y+7=0 және бір төбесінің координатасы берілген A(-2; 1). Осы тіктөртбұрыштың ауданын есептеу керек.
A) 9
B) 6
C) 2
D) 25
E) 3
F) $\sqrt{36}$
G) 35
H) 15

48.2. Тіктөртбұрыштың екі қабырғасының теңдеулері 4x-3y+5=0, 3x+4y-7=0 және бір төбесінің координатасы берілген A(2; -3). Осы тіктөртбұрыштың ауданын есептеу керек.
A) 9 ш.бірл
B) 16 ш.бірл
C) 2 ш.бірл
D) 25 ш.бірл
E) 11,44 ш.бірл
F) 26 ш.бірл
G) 11 ш.бірл
H) 44 ш.бірл

49.1. A(2;1;-1) нүктесінен өтетін және n (1;-2;3) нормаль векторы бар жазықтықтың теңдеуін құру керек:
A) 2x-3y+z+5=0
B) x-2y+3z+3=0
C) x-2y-3z+3=0
D) x-2y+3z–3=0
E) x+2y-3z+3=0
F) x-2y+3z=-3
G)-x-2y+3z+3=0
H) x+2y+3z+3=0

49.2. A(3;-1;2) нүктесінен өтетін және n (3;-4;1) нормаль векторы бар жазықтықтың теңдеуін құру керек:
A) -3x+4y-z+15 =0
B) 2x–y–z+6=0
C) 3x–y+2z–1=0

D) 3x-4y+z–15 =0
E) 2x–y–z–11=0
F) 3x-4y+z+15 =0
G) 3x-4y+z-12 =0
H) 3x-4y+z+12 =0

49.3. A(4;-2;-1) нүктесінен өтетін және n (2;-1;-1) нормаль векторы бар жазықтықтың теңдеуін
құру керек:
A) 3x-4y+z+12 =0
B) 2x–y–z+6=0
C) 3x–y+2z–1=0
D) 3x-4y+z–15=0
E) 2x–y–z–11=0
F) 2x–y–z+11=0
G) 2x–y+z+11=0
H) -2x–y–z+11=0

50.1. Координат осьтерінен 3x-2y+z-6=0 жазықтықтығы қиып өтетін кесінділердің шамаларын табыңыз.
A) -2; 3; -6

B) 2; -3; 6
C) 2; -3; -6
D) 2; 3; -6
E) 2; 3; 6
F)- 2; -3; -6
G) 0; 3; -6
H) 2; 3; -7

50.2. Координат осьтерінен 3x-4y-24z+12=0 жазықтықтығы қиып өтетін кесінділердің шамаларын табыңыз.
A) -4; 3; -0,5

B) 4; -3; -0,5
C) -4; 3; 0,5
D) 3; 4; 0,5
E) 2; 1; 3
F) 2; 1; -3

G) -4; -3; -0,5
H) -2; 1; -3

50.3 Координат осьтерінен x+2y-3z-6=0 жазықтықтығы қиып өтетін кесінділердің шамаларын табыңыз.
A) 6; 3; -2

B) -6; -3; 2
C) 6; 2; 3
D) 3; 2; 1
E) 2; 3; 6
F) -2; 3; 6

G) 2; -3; 6
H) -6; -2; -3

51.1. M_1 (1;3;4), M_2 (3;0;2), Мз (2;5;7) нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін құру керек:

A) 5x+8y-7z–1=0
B) -5x+8y+7z-l=0
C) 6x-3y+4z+5=0
D) 5x+8y-7z+1=0
E) 6x+3y-4z–5=0
F) -5x+8y-7z-l=0

G) 5x+8y-7z=1
H) 6x-3y-4z+5=0

51.2. M_1 (3;-1;2), M_2 (4;-1;-1), Мз (2;0;2) нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін құру керек:

A) x-2y+2z+13 =0
B) 2x-3y+6z-11=0
C) 3x–y+z–12=0
D) x+2y+2z–13 =0
E) 3x+3y+z-8=0
F) x+2y+2z+13 =0
G) x+2y+2z+12 =0
H) 3x+3y+z+8=0

52.1. M(1;-5;8) нүктесінен өтетін, 3x-4y+10z-5=0 жазықтығына параллель жазықтықтың теңдеуін құру керек:
A) 3x+4y-10z+103 =0
B) 3x-4y-10z–103=0
C) 3x-4y+10z–102=0
D) 3x-4y+10z–103=0
E) 3x+4y+10z+103=0
F) -3x+4y+10z+103=0
G) 3x+4y+10z-103=0
H) 3x+4y+10z+10=0

52.2. M(3;-2;-7) нүктесінен өтетін, 2x-3z+5=0 жазықтығына параллель жазықтықтың теңдеуін құру керек.
A) 2x-3z+27=0
B) 2x-3z+4=0
C) 2x-3z–5=0
D) 2x-3z-27=0
E) 2x-3z+1=0
F) 2x-3z-1=0
G) 2x-3z+5=0
H) 2x-3z=27

52.3. M(1;-1;-2) нүктесінен өтетін, x-3y+2z-11=0 жазықтығына параллель жазықтықтың

теңдеуін құру керек.
A) x-3y+2z-1=0
B) x-3y+2z+1=0
C) x-3y+2z-5=0
D) x-3y+2z+11=0
E) x-3y+2z=0
F) x+3y+2z-1=0
G) x-3y+2z+1=0
H) -x+3y-2z=0

53.1. x+2y+z+5=0 және 2x-y+z-3=0 екі жазықтықтың арасындағы бұрышты табыңыз:
A) arccos(1/3)
B) arccos(l/4)
C) arccos(l/6)
D) π/6
E) arccos(l/2)
F) π/12
G) π/2
H) π/8

53.2. 6x+3y-2z=0 және x+2y+6z-12=0 екі жазықтықтың арасындағы бұрышты табыңыз:
A) 0
B) π/2
C) π/3
D) π/4
E) π/6
F) π/12
G) π/8
H) π/7

53.3. x-y$\sqrt{2}$ +z-1=0 және x+ y$\sqrt{2}$ -z+3=0 екі жазықтықтың арасындағы бұрышты табыңыз:
A) 0
B) π/2
C) π/3
D) π/4
E) π/6
F) π/12
G) π/8
H) π/7

54.1. t параметрінің қандай мәнінде tx+(2t-l)y+z-5=0 жазықтығы 2x+3y+z-4=0 жазықтығына параллель болады:
A) t=1
B) t=-2
C) t=3
D) t=0
E) t=2
F) t=4
G) t=-2
H) t=-3

54.2. t параметрінің қандай мәнінде (t-1)x+(t+l)y+4z+5=0 жазықтығы жазықтығына x+2y+2z-30=0 параллель болады:
A) t=1
B) t=-2
C) t=7
D) t=0
E) t=3
F) t=4
G) t=2
H) t=-3

54.3. t параметрінің қандай мәнінде 2x+2ty-(2t+2)z-2=0 жазықтығы x+4y-3z+4=0 жазықтығына
параллель болады:
A) t=1
B) t=-2
C) t=3
D) t=0
E) t=4
F) t=-4
G) t=2
H) t=-3

55.1. M(2;1;1) нүктесінен x+y-z+l=0 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңыз:

A) $\sqrt{32}$
B) $\sqrt{3}$
C) $\sqrt{13}$
D) 14
E) 6
F) 3/$\sqrt{3}$
G) 3
H) 12

55.2. M(2;-1; 1) нүктесінен 16x-12y-15z-4=0 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңыз:
A) 0,2
B) 0,3
C) 1

D) 0,4
E) 4,2
F) 0
G) 2
H) 5

55.3. M(1;2;-3) нүктесінен 5x-3y+z+4=0 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңыз:
A) 0,2
B) 0,3
C) 4

D) 0

E) 4,2
F) 5
G) 1
H) 7

56.1. a параметрінің қандай мәнінде ax+(2a-1)y+z-5=0 жазықтығы 3x+y-z=0 жазықтығына перпендикуляр болады:
A) 0,2
B) 0,3
C) 4

D) 0,4
E) 4,2
F) 4/10
G) 2/5
H) 0

56.2. a параметрінің қандай мәнінде ax+(a+1)y-2z+1=0 жазықтығы 2x+3y-z-3=0 жазықтығына перпендикуляр болады:
A) a=1
B) a=-2
C) a=3
D) a=0
E) a=-1
F) a=-3
G) a=2
H) a=4

56.3. a параметрінің қандай мәнінде 3x+(2a-1)y+az-2=0 жазықтығы x+3y+2z+5=0 жазықтығына перпендикуляр болады:
A) a=1
B) a=-2
C) a=3
D) a=0
E) a=-1
F) a=-3
G) a=2
H) a=4

57.1. 5x-6y+3z+120=0 жазықтығының OXY координаталық бұрыштан қиып өтетін үшбұрыштың ауданын есептеу керек.
A) 120 ш.бірл
B) 12 ш.бірл
C) 48 ш.бірл
D) 480 ш.бірл
E) 240 ш.бірл
F) 100 ш.бірл
G) 10 ш.бірл
H) 20 ш.бірл

58.1. M(-1,3,2) нүктесінен өтетін, $\overline{p}$(-1; 2; 3) векторына параллель түзудің теңдеуін құру керек:

A) $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3}$

B) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3}$

C) $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{3}$

D) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3}$

E) $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-3}$

F) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{3}$

G) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-3}$

H) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{3}$

58.2. M(4,-2,5) нүктесінен өтетін, $\overline{p}$(3; -2; 4)векторына параллель түзудің теңдеуін құру керек:

A) $\frac{x-4}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+5}{4}$

B) $\frac{x-4}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-5}{4}$

C) $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{3}$

D) $\frac{x-4}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-5}{4}$

E) $\frac{x-4}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-5}{4}$

F) $\frac{x+4}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-5}{4}$

G) $\frac{x-4}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+5}{4}$

H) $\frac{x+4}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+5}{4}$

58.3. M(0,-1,4) нүктесінен өтетін, $\overline{p}$(-2; 4; 1) векторына параллель түзудің теңдеуін құру керек:

A) $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-4}{1}$

B) $\frac{x+1}{-2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-4}{1}$

C) $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{3}$

D) $\frac{x-4}{-2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-5}{1}$

E) $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-4}{1}$

F) $\frac{x+1}{-2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+4}{1}$

G) $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-4}{-1}$

H) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-4}{1}$

59.1. M(-1; 3; 2) нүктесі арқылы өтетін, OX осіне параллель түзудің теңдеуін құру керек:

A) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$

B) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$

C) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{1}$

D) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{0}$

E) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{1}$

F) $\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z+2}{0}$

G) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{0}$

H) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{-1}$

59.2. M(-1; 3; 2) нүктесі арқылы өтетін, OYосіне параллель түзудің теңдеуін құру керек:

A) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$

B) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$

C) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$

D) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{0}$

E) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{1}$

F) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$

G) $\frac{x+1}{0}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{0}$

H) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$

59.3. M(-1; 3; 2) нүктесі арқылы өтетін, OZосіне параллель түзудің теңдеуін құру керек:
A) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$
B) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{1}$
C) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$
D) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{0}$
E) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{1}$
F) $\frac{x+1}{0}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{1}$
G) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-2}{2}$
H) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{1}$

60.1. x=t-5, y=2t-2, z=3t+1 түзуінің канондық түрін жазыңыз:
A) $\frac{x-5}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$
B) $\frac{x+5}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$
C) $\frac{x+5}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$
D) $\frac{x+5}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{3}$
E) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3}$
F) $\frac{x+5}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$
G) $\frac{x+5}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{3}$
H) $\frac{x+5}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-3}$

60.2. x=3t-2, y=t-4, z=2t-1 түзуінің канондық түрін жазыңыз:
A) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{1}=\frac{z+1}{2}$
B) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{2}$
C) $\frac{x+2}{3}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z+1}{-2}$

D) $\frac{x+2}{3}=\frac{y+4}{1}=\frac{z+1}{2}$

E) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3}$

F) $\frac{x+2}{-3}=\frac{y+4}{1}=\frac{z+1}{2}$

G) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{2}$

H) $\frac{x+2}{-3}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-1}{2}$

60.3. x=2t+5, y=t-3, z=3t-7 түзуінің канондық түрін жазыңыз:

A) $\frac{x+5}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+7}{3}$

B) $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+7}{3}$

C) $\frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+7}{3}$

D) $\frac{x+2}{3}=\frac{y+4}{1}=\frac{z+1}{2}$

E) $\frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+7}{3}$

F) $\frac{x-7}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+7}{3}$

G) $\frac{x-5}{-2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+7}{3}$

H) $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-7}{3}$

61.1. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{1}$ және $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{1}$ түзулері арасындағы бұрышты табу керек:

A) arccos 1/6

B) π/4

C) arccos 5/6

D) arccos 1/4

E) π/2

F) π/12

G) π/8

H) π/7

61.2. $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-2}$ және $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{6}$ түзулері арасындағы бұрышты табу керек:

A) arccos 1/6

B) π/2

C) arccos 5/6

D) arccos 1/4

E) π/4

F)0
G) π/12
H) π/8

61.3. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-\sqrt{2}}=\frac{z-2}{1}$ және $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{\sqrt{2}}=\frac{z+1}{1}$ түзулері арасындағы бұрышты табу керек:
A) arccos 1/6
B) arccos 5/6
C) π/2
D) arccos 1/4
E) π/4
F)0
G) π/12
H) π/8

62.1. M(1; -3; 2) нүктесі арқылы өтетін, $\frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+3}{3}$ түзуіне параллель түзудің теңдеуін құру керек:
A) $\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{3}$
B) $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+7}{3}$
C) $\frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+7}{3}$
D) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{3}$
E) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+7}{3}$
F) $\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{3}$
G) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{3}$
H) $\frac{x+1}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{3}$

62.2. M(2; -3; 1) нүктесі арқылы өтетін, $\frac{x+2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{1}$ түзуіне параллель түзудің теңдеуін құру керек:
A) $\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{1}$
B) $\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+2}{1}$
C) $\frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+7}{3}$
D) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{3}$

E) $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{1}$

F) $\frac{x+2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{1}$

G) $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-1}$

H) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{1}$

62.3. M(-4; 5; 2) нүктесі арқылы өтетін, $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-2}$ түзуіне параллель түзудің теңдеуін құру керек:

A) $\frac{x-4}{6}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-2}{-2}$

B) $\frac{x+4}{6}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-2}{-2}$

C) $\frac{x+4}{6}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-2}{-2}$

D) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{3}$

E) $\frac{x-1}{6}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+7}{-2}$

F) $\frac{x+4}{-6}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-2}{-2}$

G) $\frac{x+4}{6}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-2}{2}$

H) $\frac{x-4}{6}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-2}{2}$

63.1. A(-1; 3; 2) нүктесі арқылы өтетін, OXZ жазықтығына перпендикуляр түзудің теңдеуін құру керек:

A) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$

B) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{0}$

C) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{1}$

D) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$

E) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$

F) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$

G) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{0}$

H) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}$

63.2. A(-1; 3; 2) нүктесі арқылы өтетін, OYZ жазықтығына перпендикуляр түзудің теңдеуін құру керек:

A) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$

B) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{0}$

C) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{1}$

D) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$

E) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$

F) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{0}$

G) $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{0}$

H) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{0}$

63.3. A(-1; 3; 2) нүктесі арқылы өтетін, OXY жазықтығына перпендикуляр түзудің теңдеуін құру керек:

A) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$

B) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{0}$

C) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{1}$

D) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$

E) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$

F) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{1}$

G) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{-1}$

H) $\frac{x+1}{0}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-2}{1}$

64.1. $\frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{8}=\frac{z-3}{4}$ түзуі 8x+ay-4z+5=0 жазықтығына параллель болатындай, a параметрінің мәнін табу керек:
A) a=1
B) a=-2
C) a=3
D) a=0
E) a=-1
F) a=2
G) a=-3
H) a=5

64.2. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+3}{-5}$ түзуі 4x-8y+az-5=0 жазықтығына параллель болатындай, a параметрінің мәнін табу керек:
A) a=8
B) a=-2
C) a=3
D) a=0
E) a=-1
F) a=2
G) a=-3
H) a=1

64.3 (x-1)/1 = (y+7)/b = (z-2)/-2 түзуі 2x+8y- 15z+3=0 жазықтығына параллель болатындай, *b* параметрінің мәнін табу керек:
A) *b* =-4
B) *b* =-2
C) *b* =3
D) *b* =0
E) *b* =-1
F) *b* =1
G) *b* =2
H) *b* =-3

65.1. (x-5)/t = (y+7)/2 = (z-3)/-4 түзуі 2x+8y-16z+7=0 жазықтығына перпендикуляр болатындай, t параметрінің мәнін табу керек:
A) -1

B) 0,5
C) 2
D) 5/10
E) -0,5
F) 1/3
G)1/2
H)1

65.2. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{t}=\frac{z+3}{-4}$ түзуі 6x+4y-8z+5=0 жазықтығына перпендикуляр болатындай, t параметрінің мәнін табу керек:

A) t=1
B) t=-2
C) t=3
D) t=0
E) t=2
F) t=-1
G) t=-3
H) t=4

65.3. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{t}$ түзуі 6x+9y-3z-4=0 жазықтығына перпендикуляр болатындай, t параметрінің мәнін табу керек:
A) t=-1
B) t=-2
C) t=3
D) t=0
E) t=4
F) t=2
G) t=-3
H) t=-4

66.1. Берілген A(-1; 1; -3) және B(1; -2; 4) нүктелері арқылы өтетін түзудің канондық теңдеуін құру керек.
A) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{7}$
B) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-3}{7}$
C) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{7}$
D) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{7}$
E) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{7}$
F) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-7}$
G) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+3}{7}$
H) $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{7}$

66.2. Берілген A(3; -2; 1) және B(2; 4; -6) нүктелері арқылы өтетін түзудің канондық теңдеуін құру керек.
A) $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{6}=\frac{z+3}{-7}$
B) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-1}{-7}$
C) $\frac{x+3}{-1}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-1}{-7}$

D) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{7}$
E) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{6}=\frac{z+1}{-7}$
F) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-1}{-7}$
G) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{-16}=\frac{z-1}{-7}$
H) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{6}=\frac{z+10}{-7}$

66.3. Берілген A(1; 2; -3) және B(3; -5; 1) нүктелері арқылы өтетін түзудің канондық теңдеуін құру керек.
A) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z-3}{4}$
B) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+3}{4}$
C) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+3}{4}$
D) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{7}$
E) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{6}=\frac{z+1}{-7}$
F) $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z+3}{4}$
G) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{7}=\frac{z+3}{4}$
H) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+3}{-4}$

67.1. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{1}$ түзуі мен 2x-2y+3z+16=0 жазықтығының қиылысу нүктесін табу керек:
A) (1; 6; -3)
B) (2; 6; 4)
C) (3; 2; 3)
D) (1; 6; -2)
E) (-1; 6; 3)
F) (1; 6; 2)
G) (1; -6; 2)
H) (-1; -6; 2)

67.2. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-2}$ түзуі мен x+2y+z-3=0 жазықтығының қиылысу нүктесін табу керек:
A) (4; 6; -1)
B) (2; 6; -1)
C) (4; 2; 1)
D) (4; 0; -1)

E) (-1; 6; 1)
F) (0;0;0)
G) (4;0;1)
H) (-4;0;-1)

67.3. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{-3}$ түзуі мен 2x-y-3z+3=0жазықтығының қиылысу нүктесін табу керек:
A) (1; 4; -3)
B) (2; 4; 4)
C) (3; 2; 3)
D) (1; 6; -1)
E) (-1; 4; -1)
F) (-1; -4; -1)
G) (-1; 4; 1)
H) (-1; 4; 0)

68.1. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-\sqrt{2}}=\frac{z+5}{1}$ түзуі мен x-$\sqrt{2}$y-z-3=0жазықтығы арасындағы бұрышты табу керек:
A) π/4
B) 0
C) π/6
D) π/3
E) π/2
F) π/12
G) π/8
H) 30^0

68.2 $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z-3}{-1}$ түзуі мен 2x+z+5=0 жазықтығы арасындағы бұрышты табу керек:
A) 0
B) π/4
C) 45^0
D) π/3
E) π/2
F) 50^0
G) π/6
H) π/8

68.3. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{1}$ түзуі мен 2x-y+z-4=0 жазықтығы арасындағы бұрышты табу керек:
A) π/4
B) arcsin 2/3
C) π/6
D) arcsin 1/6
E) π/2
F) arcsin 2/5
G) arcsin 1/2
H) arcsin 2/7

69.1. A (1;2;-3) нүктесінен 2x+2y-z-1=0 жазықтығына жүргізілген перпендикулярдың теңдеуін табу керек:

A) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-1}$

B) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{1}$

C) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}$

D) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}$

E) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{1}$

F) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-1}$

G) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$

H) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$

69.2. A (1;2;-3) нүктесінен 2x-2y+z-1=0 жазықтығына жүргізілген перпендикулярдың теңдеуін табу керек:

A) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-1}$

B) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{1}$

C) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}$

D) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}$

E) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{1}$

F) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{1}$

G) $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+3}{1}$

H) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{1}$

69.3. A(1; -2; 3) нүктесінен 2x-y+3z-4=0жазықтығына жүргізілген перпендикулярдың теңдеуін табу керек:

A) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{3}$

B) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{1}$

C) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}$
D) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}$
E) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{1}$
F) $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{3}$
G) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{-3}$
H) $\frac{x+1}{-2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{3}$

70.1. Түзу мен жазықтықтың өзара перпендикуляр болу шартын табу керек.
A) ABC+lmn=0
B) l+m+n=0
C) Al+Bm+Cn=0
D) A/l=B/m=C/n
E) A+B+C=0
F) A/l=-B/m=C/n
G) -A/l=B/m=C/n
H) A/l=B/m=-C/n

70.2. Түзу мен жазықтықтың өзара параллель болу шартын табу керек.
A) ABC+lmn=0
B) l+m+n=0
C) Al+Bm+Cn=0
D) A/l=B/m=C/n
E) A+B+C=0
F) A+B+C=-1
G) A=B=C
H) l+m+n=-1

71.1. L-дің қандай мәнінде 5x+y-3z-3=0 және 2x+Ly-3z+1=0 жазықтықтары перпендикуляр болады:
A) 6
B) 19
C) 18
D) -19
E) -18
F) 0
G) 5
H) -2

71.2. L және M-ң қандай мәндерінде 2x+Ly+3z-5=0 және Mx-6y-6z+2=0 жазықтықтары параллель болады:
A) 2; 2
B) –2; 1
C) 2; 1
D) 3; 4
E) 3; -4

F) -3;4
G) 2;-1
H) -2;-2

72.1. M_1(3;-1;2) және M_2 (4;-2;-1) нүктелері берілген. M_1 нүктесі арқылы өтетін M_1 M_2 векторына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін табыңыз:
A) x+y-3z+2=0
B) x-y-3z+2=0
C) x-y-3z=-2
D) x-y-3z-2=0
E) x+y+3z-2=0
F) x-y+3z+2=0
G) x-y-z+2=0
H) 2x-y+3z+2=0

72.2. M_1(3;-1;2) және M_2 (4;-1;-1) нүктелері берілген. M_1 нүктесі арқылы өтетін M_1 M_2 векторына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін табыңыз.
A) x-3y+z+1=0
B) x-3y-z+1=0
C) x-3z-3=0
D) x+3z-2=0
E) x-3z+3=0
F) –x+3z-3=0
G) x+3z+2=0
H) 2x+3z-2=0

73.1. Ox осіне параллель жазықтықтың теңдеуін табыңыз:
A) Ax + By +D=0

B) By+Cz+D=0
C) Ax+Cz+D=0
D) Ax+D=0
E) Cz+D=0
F) By+D=0

G) By+Cz=-D
H) x=0

73.2. Oy осіне параллель жазықтықың теңдеуін табыңыз:
A) Ax+Cz=-D
B) By+Cz+D=0
C) Ax+Cz+D=0
D) Ax+D=0
E) Cz+D=0
F) Ax+By+D=0
G) y=0
H) Ax=D

73.3. Oz осіне параллель жазықтықтың теңдеуін табыңыз:
A) Ax+By+D=0
B) By+Cz+D=0
C) Ax+Cz+D=0

D) Ax+D=0
E) Cz+D=0
F) x=0
G) y=0
H) z=0

74.1. Егер $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыш π/4 болса, $(\vec{a}-\vec{b})^2$ табу керек:
A) $2(2-\sqrt{2})$
B) $(4(2+\sqrt{2})$
C) $4(2-\sqrt{2})$
D) $4(-2+\sqrt{2})$
E) $4(-2-\sqrt{2})$
F) $\sqrt{2}$
G) $8-4\sqrt{2}$
H) $-8-4\sqrt{2}$

74.2. Егер $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыш φ=2π/3 болса, $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$табу керек:
A) -51
B) -61
C) 71
D) 80
E) 35
F) 61
G) 60
H) -72

74.3. Егер $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыш φ=2π/3 болса, $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$ табу керек:
A) 70
B) $\sqrt{2}$
C) 60
D) 73
E) 83
F) 71
G) 65
H) 21

75.1. Төбелері A(3;2;-3), B(5;1;-1), C(1;-2;1) болатын үшбұрыш берілген . AB қабырғасының AC қабырғасына проекциясын табу керек:
A) 4/3
B) 8/3
C) 4,5
D) -6,5
E) -47/7

75.2. A(-2;3;-4),B(3;2;5),C(1;-1;2),D(3;2;-4) нүктелері берілген . $\vec{AB}$ векторының $\vec{CD}$ векторының осіне проекциясын табу керек:
A) -47/7
B) 8/3
C) $-6\frac{5}{7}$
D) -6,5
E) 4/3
F) 47/7
G) 0
H) 1

75.3. Төбелері A(1;-1;2), B(2;2;-1), C(3;-2;1) болатын үшбұрыш берілген . AB қабырғасының AC қабырғасына проекциясын табу керек:
A) $\frac{\sqrt{6}}{5}$
B) $\frac{\sqrt{6}}{4}$
C) 4,5
D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
E) $\sqrt{\frac{2}{3}}$
F) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$
G) 1
H) 5

76.1. $\vec{a}$ (1 ; -2; 3) , $\vec{b}$ (1; t; -1) ортогоналды болатындай, t - санын табу керек:
A) t=-1
B) t=2
C) t=1
D) t=-2
E) t=3
F) t=4
G) t=-4
H) t=0

76.2. $\vec{a}$ (1 ; -2; -1) , $\vec{b}$ (t; 2; -2) ортогоналды болатындай, t - санын табу керек:
A) t = 2
B) t = 5
C) t = 1
D) t = 4
E) t = -3
F) t =-5
G) t =3
H) t =0

76.3. $\vec{c}$ (3;-1;1) , $\vec{d}$ (1; α;-2) ортогоналды болатындай, α - санын табу керек:

A) α= -7
B) α = 3
C) α = 1
D) α = -2
E) α = -1
F) α =-3
G) α =0
H) α =7

77.1. $\vec{a}$ (2; -1:2) векторына қарама-қарсы бағытталған $\vec{e}$ бірлік векторын табу керек:
A) (2/3, -1/3; 2/3)
B) (-2/3; 1/3; -2/3)
C) (2/3; -1/3; -2/3)
D) (-2/3; -1/3; 2/3)
E) (2/3; 1/3; 2/3)
F) (-2/3; -1/3; -2/3)
G) (1/3; 2/3; 2/3)
H) (2/3; 2/3;1/3)

77.2. $\vec{a}$ (-2;-4;4) векторына қарама-қарсы бағытталған $\vec{e}$ бірлік векторын табу керек:
A) (-1/3;-2/3; 2/3)
B) (1/3; 2/3;-2/3)
C) (-1/3; 2/3; 2/3)
D) (1/3; 2/3; 2/3)
E) (-1/3;-2/3;-2/3)
F) (-2/3; 1/3; 2/3)
G) (0; 2/3; 2/3)
H) (-1; 2; 2)

77.3. $\vec{a}$ (2;-2;-1) векторына қарама-қарсы бағытталған $\vec{e}$ бірлік векторын табу керек:
A) (-2/7;2/7; 1/7)
B) (1/3; 2/3;-2/3)
C) (-1/7; 2/7; -1/7)
D) (-2/3; 2/3; 1/3)
E) (-2/3;-2/3;-2/3)
F) (-2/3;-2/3;-1/3)
G) (-2/3;-2/5;-2/3)
H) (-2/3;-1/3;-2/3)

78.1. Егер $|\vec{a}|$=15, $|\vec{b}|$=8, $\vec{a}\,\vec{b}$ =96 болса, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларынан құрылған параллелограммның ауданын табу керек:
A) 72 ш. б.
B) $\sqrt{5184}$ ш. б.
C) 7,2 ш.б.
D) 53 ш.б.
E) 12 ш.б..
G) 22 ш.б.
H) 82 ш.б.

78.2. Егер $|\vec{a}|$=10, $|\vec{b}|$=2, $\vec{a}\,\vec{b}$ =12 болса, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларынан құрылған параллелограммның ауданын табу керек:

A) 26 ш.б
B) 16 ш.б
C) 75 ш.б
D) 72 ш.б
E) 36 ш.б

78.3. Егер $|\vec{a}|$=3, $|\vec{b}|$=26, $\vec{a}\,\vec{b}$ =30 болса, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларынан құрылған параллелограммның ауданын табу керек:
A) 26 ш.б
B) 16 ш.б
C) 75 ш.б
D) 72 ш.б
E) 36 ш.б

79.1. $\vec{a}$ (3;-5; 8) және $\vec{b}$ (-1;1;-4) векторларының айырымының модулін табу керек:
A) 6
B) 8
C) 10
D 14
E) $\sqrt{196}$

79.2. $\vec{a}$ (4;-2; 1) және $\vec{b}$ (1;2;1) векторларының айырымының модулін табу керек:
A) 5
B) 7
C) 11
D) $\sqrt{25}$
E) 13

79.3. $\vec{a}$ (5; 4; -3) және $\vec{b}$ (-3; 0; 7) векторларының қосындысының модулін табу керек:
A) $\sqrt{36}$
B) 8
C) -9
D 10
E) 6

80.1. $\vec{a}$ (1;-2; 1) және $\vec{b}$ (2;-6;3) векторлары берілген. $\vec{c}=3\vec{a}-\vec{b}$ және $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыштың косинусын табу керек.
A) 3/7
B) 2/7
C) 5/7
D) 5/2
E) ½
F)7/2
G)-5/2
H)-1/2

80.2. $\vec{a}$ (5;-6; -2) және $\vec{b}$ (-3;2;6) векторлары берілген. $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ және $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыштың косинусын табу керек.
A) 3/7
B) 2/7

C) 5/7
D) 5/21
E) ½
F)21/5
G)-1/2
H)0

80.3. $\vec{a}$ (2; 2; 1) және $\vec{b}$ (3; 6; -2) векторлары берілген. $\vec{c}=2\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыштың косинусын табу керек.
A) 13/17
B) 16/21
C) 5/7
D) 5/21
E) 17/29
F)1/2
G)-1/2
H)21/16

81.1. Қабырғалары (2;3;-1), (1;-1;1) векторлары болатын параллелограммның ауданын табу керек:
A) $\sqrt{18}$ ш.б
B) 6 ш.б

C) $\sqrt{38}$ ш.б
D) 16 ш.б
E) $\sqrt{3.8}$ ш.б

81.2. Қабырғалары (3;-1;-2), (1;2;-1) векторлары болатын параллелограммның ауданын табу керек:
A) $5\sqrt{3}$ ш.б
B) $4\sqrt{3}$ ш.б
C) $\sqrt{88}$ ш.б
D) $\sqrt{28}$ ш.б
E) $\sqrt{56}$ ш.б
F) $\sqrt{75}$ ш.б
G) 75ш.б
H) 5 ш.б

81.3. Қабырғалары (-1;3;-3), (2;0;2) векторлары болатын параллелограммның ауданын табу керек:
A) $5\sqrt{3}$ ш.б
B) $4\sqrt{3}$ ш.б
C) $\sqrt{88}$ ш.б
D) $\sqrt{28}$ ш.б
E) $\sqrt{56}$ ш.б
F) $2\sqrt{22}$ ш.б
G) 75ш.б

H) 5 ш.б

82.1. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ векторлары берілген . $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары φ=2π/3 бұрышын жасайды. $\vec{a}\,\vec{b}$ есептеу керек:
A) 3/7
B) 2/7
C) 5/7
D) -6
E) ½
F) -36/6
G)7/3
H)7/2

82.2. $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$ векторлары берілген . $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары φ=π/3 бұрышын жасайды. $\vec{a}\,\vec{b}$ есептеу керек:
A) 3/7
B) 2/7
C) 5/7
D) 15
E) ½
F)35
G)30
H) $\sqrt{225}$
.

82.3. $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$ векторлары берілген . $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары φ=2π/3 бұрышын жасайды. $\vec{a}\,\vec{b}$ есептеу керек:
A) -1
B) 2/7
C) 5/7
D) 5/21
E) ½
F)1
G)0
H)4

82.4. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=8$ векторлары берілген . $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары φ=2π/3 бұрышын жасайды. $\vec{a}\,\vec{b}$ есептеу керек:
A) -24/2
B) 2/7
C) 5/7
D) -12
E) ½
F)-1/12
G) 1/12
H) 0

83.1. $\vec{a}$ (5;2;5) векторының $\vec{b}$ (2;-1;2) векторының осіне проекциясын табу керек:
A) 6
B) 2/7

C) $\sqrt{36}$
D) 5/21
E) 1
F) 5
G) 5/7
H) 76/12

83.2. $\vec{a}$ (1;-3;1) векторының $\vec{b}$ (12;-16;15) векторының осіне проекциясын табу керек:
A) 3
B) 2/7
C) 5/7
D) 5/21
E) ½
F)0
G)1
H)4

83.3. $\vec{a}$ (1;-3;4) векторының $\vec{b}$ (2;-3;6) векторының осіне проекциясын табу керек:
A) 3/7
B) 2/7
C) 5/7
D) 5
E) 1/2
F) 0
G) 1
H) 4

84.1. $\vec{a}$(3;-1;-2), $\vec{b}$(1;2;-1) векторлары берілген. [$\vec{a}\,\vec{b}$] векторлық көбейтіндінің координаталарын табу керек.
A) (5; 1; 7)
B) (5; 2; 8)
C) (10; 2; 14)
D) (10; 3; 4)
E) (20; 4; 28)
F) (5; 1; -7)
G) (5; -1; 7)
H) (-5; 1; 7)

84.2. $\vec{a}$ (1;-1;3), $\vec{b}$ (-2;2;1) , $\vec{c}$ (3;-2;5) векторларының аралас көбейтіндісін табу керек:
A) -25
B) -17
C) 7
D) 17
E) -7
F)-49/7
G) $\sqrt[3]{-343}$
H) 0

84.3. $\vec{a}$ (3;-2;1), $\vec{b}$ (2;1;2) , $\vec{c}$ (3;-1;-2) векторларының аралас көбейтіндісін табу керек:
A) -25

B) -17
C) 7
D) 17
E) -7
F) 0
G) 1
H) 25

84.4. $\vec{a}$ (1;-2;3), $\vec{b}$ (2;3;2) , $\vec{c}$ (-1;3;-1) векторларының аралас көбейтіндісін табу керек:
A) $\sqrt{324}$
B) 7
C) 18
D) -11
E) 14
F)0
G)1
H)25

84.5. $\vec{a}$ (2;-3;1), $\vec{b}$ (4;-1;-1) , $\vec{c}$ (2;-3;0) векторларының аралас көбейтіндісін табу керек:
A) $\sqrt[3]{-1000}$
B) -7
C) 11
D) -10
E) -9
F) 2
G) 10
H) 0

85.1. $\vec{a}$ (2;1;-1), $\vec{b}$ (1;1;3), $\vec{c}$ (3;-4;2) векторларынан тұрғызылған параллелепипедтің көлемін табу керек:

A) 17 куб. б
B) 15 куб. б
C) 42 куб. б
D) 25 куб. б
E) 4,2 куб. б
F) 5 куб. б.
G) 2 куб. б.
H) 1,7 куб.б.

85.2. $\vec{a}$ (3;6;3), $\vec{b}$ (1;3;-2), $\vec{c}$ (2;2;2) векторларынан тұрғызылған параллелепипедтің көлемін табу керек:

A) 17 куб. б

B) 23 куб. б

C) 22 куб. б

D) 25 куб. б

E) 18 куб. б

F) 5 куб. б

G) 2 куб. б.
H) 1,7 куб.б.

85.3. $\vec{a}$ (3;-2;1), $\vec{b}$ (2;1;2), $\vec{c}$ (3;-1;-2) векторларынан тұрғызылған параллелепипедтің көлемін табу керек:

A) 17 куб. б

B) 23 куб. б

C) $\sqrt{625}$ куб. б

D) 25 куб. б

E) 18 куб. б

86.1. Төбелері A(3;5;4), B(8;7;4), C(5;10;4) D(4;7;8) нүктелерінде болатын ABCD пирамиданың көлемін табу керек:
A) 14 куб. б
B) 24 куб. б
C) 1,4 куб. б
D) 12 куб. б
E) 26 куб. б
F) $\sqrt{196}$ куб. б
G) 4 куб. б
H) 2 куб. Б

86.2. Төбелері A(2;-1;1), B(5;5;4), C(3;2;-1), D(4;1;3) нүктелерінде болатын ABCD пирамиданың көлемін табу керек:
A) 3 куб. б
B) 30 куб. б
C) 108 куб. б
D) 308 куб. б
E) 300 куб. б
F) $\sqrt{9}$ куб. б.
G) 10 куб. б.
H) 18 куб. б.

86.3. Төбелері A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;8) нүктелерінде болатын ABCD пирамиданың көлемін табу керек:
A) 3 куб. б
B) 30 куб. б
C) 108 куб. б
D) 154/3 куб. б
E) 300 куб. б
F) 8 куб. б.
G) 10 куб. б.
H) 18 куб. б.

87.1. $\vec{a}$ (2;-4;4) және $\vec{b}$ (-3;2;6) векторлары арасындағы бұрыштың косинусын табу керек:
A) 6/21

B) 5/21

C) 4/5
D) 19/21
E) 20/21
F) -5/21
G) 7/21
H) -7/21

87.2. $\vec{a}$ (1;0;0) и $\vec{b}$ (2;6;-3) векторлары арасындағы бұрыштың косинусын табу керек:
A) 3/21
B) 5/21
C) 5/7
D) 2/7
E) 11/21
F) -2/7
G) 14/49
H) 7/2

87.3. $\vec{a}$ (4;-2;-4) и $\vec{b}$ (6;-3;2) векторлары арасындағы бұрыштың косинусын табу керек:
A) 3/21
B) 5/21
C) 5/7
D) 2/7
E) 11/21
F) -11/21
G) 21/11
H)-3/21

88.1. $\vec{a}$ (6;3;-2) векторының модулін табу керек.
A) $\sqrt{49}$
B) 5
C) 5/7
D) 2/7
E) 7
F) 2
G) 21
H) 1

88.2. $\vec{a}$ (4;-2;-4) векторының модулін табу керек.
A) 3
B) $\sqrt{36}$
C) 5
D) 2/7
E) 6
F) 21
G) 6,1
H) 7

88.3. $\vec{a}$ (4;3;0) векторының модулін табу керек.
A) 3
B) $\sqrt{25}$

C) 5
D) 2/7
E) 6
F) 21
G) 125/25
H) 7

89.1. $\vec{a}$ (3 ;-2; 6) , $\vec{b}$ (-2 ;1; 0) векторлары берілген. $\vec{a}+\vec{b}$ векторының координаталарын табу керек.
A) (1; 1; 12)
B) (1; -1; 6)
C) (1; -3; 6)
D) (5; 3; 6)
E) (6; -4; 12)
F) (1; -1; -6)
G) (1; 1; 6)
H) (-1; -1; 6)

89.2. $\vec{a}$ (3 ;-2; 6) , $\vec{b}$ (-2 ;1; 0) векторлары берілген. $2\vec{a}+3\vec{b}$ векторының координаталарын табу керек.
A) (1; 1; 12)
B) (1; -1; 6)
C) (1; -3; 6)
D) (5; 3; 6)
E) (0; -1; 12)
F) (0; -1; -12)
G) (0; 1; 12)
H) (4; -1; 12)

89.3. $\vec{a}$ (3 ;-2; 6) , $\vec{b}$ (-2 ;1; 0) векторлары берілген. $2\vec{a}-\vec{b}$ векторының координаталарын табу керек.
A) (1; 0; 3)
B) (6; 5; -10)
C) (8; -5; 12)
D) (4; -5; 12)
E) (8; 5; 12)
F) (8; -5; -12)
G) (8; 0; 12)
H) (1; -5; 12)

90.1. Егер үш вектор бір жазықтықта жатса немесе бір жазықтыққа параллель болса, онда векторлар қалай аталады:
A) коллинеар
B) коллинеар емес
C) компланар
D) компланар емес
E) параллель

91.1. Егер $\vec{a}$ (2 ; 0) және $\vec{b}$ (1 ; 1) болса, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрышты табу керек:
A) (1; 0; 3)

B) (6; 5; -10)
C) (8; -5; 12)
D) (4; -5; 12)
E) (8; 5; 12)
F) (8; -5; -12)
G) (8; 0; 12)
H) (1; -5; 12)
*
91.2. Егер $\vec{a}$ (3 ;0;4) және $\vec{b}$ (7;0; 1) болса, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрышты табу керек:
A) 30°
B) 60°
C) 90°
D) 45°
E) 0°
F) π/4
G) 75^0
H) 15^o
*
91.3. Егер $\vec{a}$ (0;3;0) және $\vec{b}$ (7;0; 1) болса, $\vec{a}$ және bвекторлары арасындағы бұрышты табу керек:
A) 30°
B) 60°
C) 90°
D) 45°
E) 0°
F) π/2
G) π
H) 15^o

91.4. Егер $\vec{a}$ (3 ; 4) және $\vec{b}$ (7 ; 1) болса, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрышты табу керек:
A) 135^0
B) π/4
C) 45^0
D) 90^0
E) 60^0
F) 35^0
G) 75^0
H) 15^o
*
92.1. $\vec{a}$ (4;-2;-4), $\vec{b}$ (6;-3;2) векторлары берілген. $\vec{a}\,\vec{b}$ скаляр көбейтіндіні табу керек .
A) 3
B) 21
C) 5
D) 2/7
E) 22
F) 2
G) 7
H) -22

92.2. $\vec{a}$ (4;-2;-4), $\vec{b}$ (6;-3;2) векторлары берілген. $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$ скаляр көбейтіндіні табу керек **.**

A) 200
B) 22
C) 125
D) -200
E) 129.
F) 199
G) 20
H) -20

92.3. $\vec{a}$ (4;-2;-4), $\vec{b}$ (6;-3;2) векторлары берілген. $(\vec{a}+\vec{b})^2$ скаляр көбейтіндіні табу керек **.**

A) 200
B) 22
C) 125
D) -200
E) 129
F) 12
G) 19
H) 258/2

93.1. $\vec{a}=3\overline{e_1}-2\overline{e_2}$, $\vec{b}=-5\overline{e_1}+\overline{e_2}$ векторлары берілген. $\vec{a}$ + $\vec{b}$ векторының координатасын табу керек:

A) (-2; 1)
B) (2; 1)
C) (-2; -1)
D) (2; -1)
E) (1; -2)
F) (0;2)
G) (-2;0)
H) (0;0)

93.2. $\vec{a}=5\overline{e_1}-8\overline{e_2}$, $\vec{b}=3\overline{e_1}+10\overline{e_2}$ векторлары берілген. $\vec{a}$ + $\vec{b}$ векторының координатасын табу керек:

A) (7; 9)
B) (2; 18)
C) (8; 2)
D) (-1; 5)
E) (2; -2)
F) x+y=10
G) x-y=6
H) x+y=-10

93.3. $\vec{a}=-4\overline{e_1}+7\overline{e_2}$, $\vec{b}=3\overline{e_1}-2\overline{e_2}$ векторлары берілген. $\vec{a}$ + $\vec{b}$ векторының координатасын табу керек:

A) x+y=4
B) y-x=6
C) (8; 2)
D) (-1; 5)

E) (2; -2)
F) (7; 9)
G) (2; 18)
H) (1; 5)

93.4. $\vec{a}=8\overline{e_1}-6\overline{e_2}$, $\vec{b}=2\overline{e_1}+\overline{e_2}$ векторлары берілген. $\vec{a}$ - $\vec{b}$ векторының координатасын табу керек:
A) (8 ;-6)
B) (10;5)
C) (6 ; -7)
D) x+y=-1
E) (2 ; -1)
F) (-2 ;3)
G) x+y=1
H) x˙y=-42
****
94.1. A(-1;3;-7) ,B(2;-1;5),C(0;1;-5) нүктелері берілген. $A\vec{B} * A\vec{C}$ скаляр көбейтіндіні табу керек.
A) 500
B) 45
C) 35
D) 85
E) -524
F) -35
G)0
H) 1
*
94.2. $\vec{a}$ (1 ; 2) және $\vec{b}$ (3 ; -4) векторларының скаляр көбейтіндісін табу керек:
A) 3
B) 21
C) 5
D) 2/7
E) -5
F) 0
G) 1
H) 1/5

94.3. $\vec{a}$ (3 ;- 2) және $\vec{b}$ (2 ;5) векторларының скаляр көбейтіндісін табу керек:
A) 3
B) 21
C) 5
D) 2/7
E) -4
F) 4
G) 2
H) 0

94.4. $\vec{a}$ (1 ;- 3) және $\vec{b}$ (6 ;-8) векторларының скаляр көбейтіндісін табу керек:
A) 30
B) 21

C) 5
D) 2/7
E) 6
F) $\sqrt{900}$
G) -30
H) 0

95.1. $\vec{a}$ (2 ; 3 ; -1) , $\vec{b}$ (0 ; 1; 4) , $\vec{c}$ (1 ; 0; -3) векторлары берілген. $2\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$ векторының координатасын табу керек:
A) (5; 2; 0)
B) (2; 5; 0)
C) (-2; 5; 1)
D) (2; -5; 0)
E) (-2; -5; 0)
F) x+y+z=7
G) x+y=7
H) x+z=-2

95.2. $\vec{a}$ (2 ;3; -1) , $\vec{b}$ (0; 1; 4) , $\vec{c}$ (1; 0; -3) векторлары берілген. $3\vec{a}$ +2 $\vec{b}$ - $\vec{c}$ векторының координатасын табу керек:
A) (5; 11; 8)
B) (0; 11; 9)
C) x+y+z=24
D) x+y+z=25
E) (1; 2; -3)
F) (8; -5; 10)
G) (0; 4; 9)
H) x+y=16

95.3. $\vec{a}$ (2 ; 3; -1), $\vec{b}$ (0; 1; 4), $\vec{c}$ (1; 0; -3) векторлары берілген. $\vec{a}$ + $\vec{b}$ -2 $\vec{c}$ векторының координатасын табу керек:
A) (5; 11; 8)
B) (0; 11; 9)
C) (8; -5; 10)
D) (0; 4; 9)
E) (1; 2; -3)
F) (4; 4; 9)
G) (-8; 4; 9)
H) (0; 0; 9)

96.1. A(1;1;1), B(2;2;1), C(2;1;2) үш нүкте берілген. $\angle BAC$ бұрышын табу керек.
A) 30^0
B) 45^0
C) 60^0
D) π/3
E) 0^0
F) 90^0
G) π
H) π/2

97.1. $\vec{p}$ (-3 ; 4) векторының ұзындығын табыңыз:
A) 3
B) 21
C) 5
D) 2/7
E) 6
F) 7
G) 8
H) 9
****
97.2. $\vec{p}$ (5 ;-12) векторының ұзындығын табыңыз:
A) 3
B) 21
C) 5
D) 2/7
E) 13
F) $\sqrt{169}$
G) 1,3
H) 7

97.3. $\vec{p}$ (-15 ;8) векторының ұзындығын табыңыз:
A) 3
B) 21
C) 5
D) 2/7
E) 17
F) 1,7
G) 4
H) 7

98.1. Егер $\vec{a}$ (2;-3;-1) векторының ұшы (1;-1;2) нүктесімен беттессе, оның басының координатасын анықтаңыз.
A) (-1; 2; 3)
B) (1; 2; -3)
C) (1; 1; 1)
D) (2; 1; 3)
E) (1; 2; 3)
F) (-1; 2; 0)
G) (-1; -2; 3)
H) (-1; -2; -3)

98.2. Егер $\vec{a}$ (3;-1;4) векторының ұшы (4;1;1) нүктесімен беттессе, оның басының координатасын анықтаңыз.
A) (1; 2; 3)
B) (1; 1; 1)
C) (-1; -2; -3)
D) (-1; 2; 3)
E) (1; 2; -3)
F) (0;2;-3)
G) (1;0;-3)
H) (1;2;0)

99.1. $\vec{a}$ (0 ;2;-1) векторының $\vec{b}$ (1;-2; 2) векторы арқылы анықталған оське проекциясын анықтаңыз:
A) 4
B) –3
C) 2
D) 1
E) –2
F) -4
G) 3
H) 11

99.2. $\vec{a}$ (0; 2; 1) векторының $\vec{b}$ (6; 3; 2) векторы арқылы анықталған оське проекциясын анықтаңыз:
A) 8/7
B) 1/7
C) 5
D) 8
E) 1
F) -8/7
G) 7/8
H) -7/8

100.1. Вектордың x=4,y=-12 екі координатасы берілген.Оның $|\vec{a}|$=13 болса, z үшінші координатасын табу керек.
A) ± 4
B) ± 2
C) ± 1
D) ± 3
E) ± 6
F) $\pm$ 7
G) $\pm$ 8
H) $\pm$ 5

100.2. Вектордың x= 6, y=3 екі координатасы берілген.Оның $|\vec{a}|$=7 болса, z үшінші координатасын табу керек.
A) ± 1
B) ± 2
C) ± 3
D) ± 4
E) ± 6
F) $\pm$ 7
G) $\pm$ 8
H) $\pm$ 5

101.1. Векторлардың перпендикуляр болуының қажетті және жеткілікті шартын табу керек.
A) [$\vec{a}\,\vec{b}$]=0
B) $\vec{a}\,\vec{b}$ =0
C) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ =0
D) $\vec{a}\,\vec{b}$ =1

E) [$\vec{a}\,\vec{b}$]=1
F) [$\vec{a}\,\vec{b}$]=-1
G) $\vec{a}\,\vec{b}\ \vec{c}$ =1
H) $\vec{a}\,\vec{b}$ =-1

101.2. Векторлардың коллинеар болуының қажетті және жеткілікті шартын табу керек.
A) [$\vec{a}\,\vec{b}$]=0
B) $\vec{a}\,\vec{b}$ =0
C) $\vec{a}\,\vec{b}\ \vec{c}$ =0
D) $\vec{a}\,\vec{b}$ =1
E) [$\vec{a}\,\vec{b}$]=1
F) [$\vec{a}\,\vec{b}$]=-1
G) $\vec{a}\,\vec{b}\ \vec{c}$ =1
H) $\vec{a}\,\vec{b}$ =-1

101.3. Векторлардың компланар болуының қажетті және жеткілікті шартын табу керек.
A) [$\vec{a}\,\vec{b}$]=0
B) $\vec{a}\,\vec{b}$ =0
C) $\vec{a}\,\vec{b}\ \vec{c}$ =0
D) $\vec{a}\,\vec{b}$ =1
E) [$\vec{a}\,\vec{b}$]=1
F) [$\vec{a}\,\vec{b}$]=-1
G) $\vec{a}\,\vec{b}\ \vec{c}$ =1
H) $\vec{a}\,\vec{b}$ =-1

102.1. $\vec{a}$ (x_1; y_1; z_1) және $\vec{b}$ (x_2; y_2; z_2) векторларының координаталары берілген. Екі вектордың
перпендикулярлық шартын табу керек.
A) $x_1 - x_2 = y_1 - y_2 = z_1 - z_2$
B) $x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 = 0$
C) $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 1$
D) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$
E) $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$
F) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} =1$
G) $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = -1$
H) $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$

102.2. $\vec{a}$ (x_1; y_1; z_1) және $\vec{b}$ (x_2; y_2; z_2) векторларының координаталары берілген. Екі вектордың коллинеар болу шартын табу керек.
A) $x_1 - x_2 = y_1 - y_2 = z_1 - z_2$
B) $x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 = 0$
C) $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 1$

D) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

E) $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$

F) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ =1

G) $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = -1$

H) $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$

102.3. Егер АВ векторы өзінің ақырлы A(x_1; y_1; z_1) және B(x_2; y_2; z_2) нүктелері арқылы берілсе,
онда АВ векторының координаталары қалай табылады.

A) ($x_2 + x_1$; $y_2 + y_1$; $z_2 + z_1$)

B) ($x_2 - x_1$; $y_2 - y_1$; $z_2 - z_1$)

C) (x_2 x_1; y_2 y_1; z_2 z_1)

D) (x_2 ; y_2 ; z_2)

E) (x_1; y_1; z_1)

F) ($x_2 + x_1$; $z_2 + z_1$; $y_2 + y_1$)

G) ($x_2 + x_1$; y_1; $z_2 + z_1$)

H) (x_2 ; $y_2 + y_1$; $z_2 + z_1$)

103.1. | $\vec{a}$ | = 2, | $\vec{b}$ | = 1, ($\vec{a}$, $\vec{b}$) = 60°. $\vec{b}$ және $\vec{a} - \vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыштың косинусын табыңыз:

A) 1/2

B) 0, 3

C) 0

D) 1

E) –1

F) 4/5

G) -1/2

H) 0,5

103.2. | $\vec{a}$ | = 2, | $\vec{b}$ | = 1, ($\vec{a}$, $\vec{b}$) = 60°. $\vec{b}$ және $\vec{a} + \vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыштың косинусын табыңыз:

A) 2$\sqrt{7}$ /7

B) -5/2$\sqrt{13}$

C) -3$\sqrt{7}$ /7

D) 7$\sqrt{13}$ /8

E) -10$\sqrt{13}$ /13

F) 4/5

G) -1/2

H) 0,5

103.3. | $\vec{a}$ | =3, | $\vec{b}$ | = 4, ($\vec{a}$, $\vec{b}$) = 60°. $\vec{b}$ және $\vec{a} - \vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыштың косинусын табыңыз:

A) 3$\sqrt{7}$ /7

B) -5/2$\sqrt{13}$

C) -3$\sqrt{7}$ /7

D) $7\sqrt{13}/8$
E) $-10\sqrt{13}/13$
F) $-5/\sqrt{13}$
G) $-1/2\sqrt{13}$
H) $5/2\sqrt{13}$

104.1. Фокустары абсцисса осінде координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы орналасқан және жарты осьтері сәйкес 4 пен 2 болатын, эллипстің канондық теңдеуін құру керек:

A) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$
B) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$
C) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$
D) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$
E) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$
F) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{6}=1$
G) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1$
H) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$

105.1. Эллипстің $16x^2 + y^2 = 16$ жарты осьтерін анықтау керек:
A) 1; 4
B) 2; 4
C) 3; 4
D) 2; 1
E) 3; 1
F) a+b=5
G) ab=4
H) 4;1

105.2. Эллипстің $x^2 + 25y^2 = 25$ жарты осьтерін анықтау керек:
A) 5; 1
B) a-b=4
C) ab=5
D) 2; 5
E) 5; 5
F) 1;5
G) 3; 5
H) 1; 2

105.3. Эллипстің $9x^2 + 25y^2 = 225$ жарты осьтерін анықтау керек:

A) 1; 5
B) 5 ; 3
C) 1; 2
D) a+b=8
E) 5; 5
F) 2; 5
G) 3;5
H) ab=15

106.1. Фокустары абсцисса осінде координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы орналасқан және фокустар арасындағы қашықтық 2c = 10, 2b = 8 тең гиперболаның канондық теңдеуін құрыңыз:

A) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

B) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

C) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

D) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

E) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

F) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

G) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$

H) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{64}=1$

106.2. Фокустары абсцисса осінде координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы орналасқан және асимптотасының теңдеуі $y=\pm\frac{4}{3}x$, ал фокустар арасындағы қашықтық 2c=20 болатын гиперболаның канондық теңдеуін құру керек:

A) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

B) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

C) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

D) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

E) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

F) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{64}=1$

G) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = -1$

H) $-\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

107.1. OX осіне қатысты симметриялы, M(4,-2) нүктесі арқылы өтетін параболаның канондық теңдеуін құру керек:
A) $x^2=y$
B) $y^2=x$
C) $y^2=-2x$
D) $x^2=-3y$
E) $y^2=-x$
F) $x=y^2$
G) $y=2x^2$
H) $x=2y^2$

107.2. OX осіне қатысты симметриялы, M(9;6) нүктесі арқылы өтетін параболаның канондық теңдеуін құру керек:
A) $y^2=4x$
B) $y^2=-4x$
C) $y^2=-12x$
D) $y^2=-9x$
E) $y^2=9x$
F) $x=y^2/4$
G) $y=x^2$
H) $4y^2=x$

108.1. $y^2 = -16x$ параболаның фокусының координаталарын табу керек:
A) xy=-4
B) (0; -4)
C) (-4; 0)
D) xy=0
E) x+y=-4
F) (4; 0)
G) (2; 0)
H) (0; 4)

108.2. $y^2 = 24x$ параболаның фокусының координаталарын табу керек:
A) (-4; 0)
B) (6; 0)
C) (-3; 0)
D) (-6; 0)
E) (4; 0)
F) x-y=-6
G) xy=0
H) x+y=6

108.3. $y^2 = 12x$ параболаның фокусының координаталарын табу керек.
A) (-4; 0)
B) x+y=3
C) (-3; 0)

D) (3; 0)
E) xy=0
F) x-y=-3
G) (4; 0)
H) (6; 0)

109.1. Эллипсоидтің канондық теңдеуін табыңыз:

A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

B) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

C) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

D) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$

E) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$

F) $y^2=2px$

G) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

H) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

110.1. Бірқуысты гиперболоидтың канондық теңдеуін табыңыз:

A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

B) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

C) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

D) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$

E) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$

F) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

G) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

H) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

111. 1. Екіқуысты гиперболоидтың канондық теңдеуін табыңыз:

A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

B) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

C) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

D) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$

F) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

G) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

H) $y^2=2px$

112.1. Эллиптстік параболоидтың канондық теңдеуін табыңыз:

A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

B) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

C) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

D) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$

E) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$

F) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

G) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

H) $y^2=2px$

113.1. Гиперболалық параболоидтың канондық теңдеуін табыңыз:

A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

B) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

C) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

D) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$

E) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$

F) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

G) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
H) $y^2=2px$

114.1. Фокустар деп ататлатын берілген екі нүктеден қашықтықтардың қосындысы әрқашан тұрақты шама, 2a болатын, нүктелердің геометриялық орындары қандай қисықты анықтайды:
A) гипербола
B) шеңбер
C) түзу
D) эллипс
E) парабола

115.1. Гиперболаның канондық теңдеуін табу керек:
A) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
B) $y^2=2px$
C) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
D) $x^2=2qy$
E) $x^2+y^2=a^2$
F) $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
G) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
H) $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

116.1. Шеңбердің эксцентриситеті неге тең?
A) 2
B) 3
C) 1
D) 0
E) –1
F) ∞
G) π
H) 1,5

117.1. $x^2 – 4y^2 = 16$ гиперболаның жарты осьтерін табу керек:
A) a=4; b=2
B) a=4; b=1
C) a=2; b=4
D) a+b=6
E) a=2; b=8
F) a=1; b=4
G) ab=8
H) a-b=-2

117.2. $4x^2 – 9y^2 = 25$ гиперболаның жарты осьтерін табу керек.
A) 5/2; 5/3
B) 1/5; 1/4

C) ab=25/6
D) a+b=25/6
E) 1; 1
F) 1/3; 1/2
G) 2; 1
H) a+b=25/3

118.1. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ гиперболаның асимптоталарының теңдеулерін табу керек:
A) y =±4x/9
B) y=± 2x/5
C) x=±3y/2
D) y =±3 x/2
E) y=±2x/3
F) 3y=±2x
G) y=x
H) y=±2x

118.2. $16x^2-9y^2=144$ гиперболаның асимптоталарының теңдеулерін табу керек.
A) 3y=±4x
B) y=±4/5x
C) y=±3/2x
D) y=±4/3x
E) y=±1/2x
F) y=±7x
G) y=x
H) 4y=±3x

119.1. Қандай теңдеулермен анықталған түзулер гиперболаның асимптоталары деп аталады:
A) $y=\pm\frac{b}{a}x$
B) $x=\pm\frac{a}{b}y$
C) $y=\pm\frac{c}{a}x$
D) $y=\pm\frac{b}{c}x$
E) $x=\pm\frac{a}{c}y$
F) y=±x
G) y=±ax
H) y=±bx

120.1. Фокус деп аталатын берілген нүктеден және директриса деп аталатын берілген түзуден арақашықтары бірдей болатын нүктелердің геометриялық орындары деп қандай сызық аталады:
A) парабола
B) эллипс
C) шеңбер
D) гипербола

E) нүкте

121.1. Параболаның эксцентриситеті неге тең:
A) 0
B) 2
C) 1
D) 1ден кіші
E) табылмайды
F) ∞
G) π
H)1,5

122.1. Параболаның канондық теңдеуін табу керек:
A) $x^2=y^2$
B) $y^2=2px$
C) $x^2+y^2=a^2$
D) $x^2+y^2=0$
E) x=y
F) $y=\pm\frac{b}{a}x$
G) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$
H) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

123.1. Эллипстің симметрия осьтерімен қиылысу нүктелері эллипстің қандай нүктелері деп аталады:
A) қабырғалары
B) төбелері
C) директрисалары
D) фокустары
E) радиустары

124.1. Қандай сызықтың эксцентриситеті бірден үлкен:
A) гиперболаның
B) эллипстің
C) шеңбердің
D) түзудің
E) параболаның

124.2. Қандай сызықтың эксцентриситеті бірден кіші:
A) гиперболаның
B) эллипстің
C) шеңбердің
D) түзудің
E) параболаның

125.1. Тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ теңдеуімен анықталатын бет қалай аталады:

A) параболалық цилиндр
B) бірқуысты гиперболоид
C) эллипсоид
D) сфера
E) эллипстік параболоид

Пайдаланған әдебиет:

1 Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия Ч1. М. Просвещение 1986.
2 Ильин В. А. Поздняк Э. Г. Аналитическая геометрия М. Наука 1984.
3 Привалов И.И. Аналитическая геометрия.М. Наука 1966.
4 Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М. Наука 1975.