ЭКОНОМИКАДАҒЫ МАТЕМАТИКА

БЕРДЕНОВА Г.Ж.

ОҚУ- ӘДІСТЕМЕЛІК ҚҰРАЛ

Қостанай, 2024

Қазақстан Республикасының ғылым және жоғарғы білім министрлігі

А.Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті

Машина жасау, энергетика және ақпараттық технологиялар факультеті

Математика және физика кафедрасы

Г.Ж.Берденова

ЭКОНОМИКАДАҒЫ МАТЕМАТИКА

Оқу-әдістемелік құрал

Қостанай, 2024

ӘОЖ 51:330
КБЖ 22.11
Б 45

Автор:
Берденова Гульнар Жалгасовна, математика және физика кафедрасының аға оқытушысы

Рецензенттер:
Джаманбалин Кадыргали Коныспаевич – З.Алдамжар атындағы ҚӘТУ-нің ЖАК профессоры, физика-математикалық ғылымдарының докторы
Ысмагул Роза Сапабековна – А. Байтұрсынұлы атындағы ҚӨУ математика және физика кафедрасының профессорының м.а., физика-математикалық ғылымдарының кандидаті
Утемисова Анар Алтаевна – А. Байтұрсынұлы атындағы ҚӨУ математика және физика кафедрасының қауымдастырылған профессорының м.а., педагогикалық ғылымдарының кандидаті

Берденова Г.
Б 45 Экономикадағы математика: Оқу-әдістемелік құрал.– Костанай: А. Байтұрсынұлы атындағы ҚӨУ, 2024. – 107 б.

ISBN 978-601-356-374-9

«Экономикадағы математика» оқу-әдістемелік құралда теориялық материялдарға шолу жасалған, оқу программасына сай мысалдар келтіріліп оның шығару жолдары көрсетілген, сонымен қатар өз еркімен шығаруға есептер кіргізілген.

Ұсынылатын оқулық университеттің экономикалық мамандықтарының 1 курс студенттеріне арналған.

ӘОЖ 51:330
КБЖ 22.11

Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университетінің Оқу-әдістемелік комиссиясымен 29.05.2024 жылы № 3 хаттамасымен бекітілген

ISBN 978-601-356-374-9

МАЗМҰНЫ

Кіріспе

"Экономикадағы Математика" оқу әдістемалік құралы экономикалық мамандықтардың студенттеріне, оқытушыларға және математика мен экономикалық процестердің өзара байланысына қызығушылық танытқандарға арналған. Қазіргі әлемде экономика мен математика бір-бірімен тығыз байланысты және математикалық әдістерді түсіну экономика саласындағы табысты кәсіби қызметтің ажырамас бөлігіне айналды.

Бұл нұсқаулықтың мақсаты – студенттерге математикалық аппараттың негіздері бойынша жүйеленген және қол жетімді материал ұсыну.

Оқу-әдістемелік құрал, «Экономикадағы математика» пәні бойынша, оқу программасына сай, негізгі теориялық материялдарға шолу жасалған, мысалдар келтіріліп оның шығару жолдары көрсетілген. Бұл кешенде сызықтық алгебра, векторлық алгебра, жазықтықтағы түзу, бір айнымалы функцияның дифференциалдық және интергралдық есептеулері және көп айнымалы функцияның дифференциалдық есептеулері қарастырылған.

Әдістемелік құрал негізгі математикалық ұғымдар мен әдістерді теориялық бөлімдерді, сонымен қатар практикалық тапсырмалар мен оларды экономикада қолдану мысалдарын қамтиды. Әрбір тақырып өзін-өзі тексеру сұрақтарымен және өз бетінше шешуге арналған есептермен аяқталады, яғни студенттердің алған білімдері мен дағдыларын бекітуге мүмкіндік береді.

Бұл нұсқаулық сіздің оқуыңыз бен кәсіби дамуыңызда сенімді көмекші болады деп үміттенеміз. Ол сізді талдау және шешім қабылдау үшін қажетті математикалық құралдармен қаруландырып, экономика саласындағы жаңа ашылымдар мен жетістіктерге шабыттандырсын.

1-тақырып АНЫҚТАУЫШТАР

Дәріс мақсаты: Анықтауыштар ұғымын енгізу. 2, 3-ретті анықтауыштарды есептеу ережесімен таныстыру.

Қарастыруға арналған сұрақтар тізімі:

1. 2-ші ретті анықтауыш, оны есептеу ережесі.
2. 3-ші ретті анықтауыш, оны есептеу ережесі.
3. Анықтауыштың негізгі қасиеттері.
4. Минор және алгебралық толықтауыштар.
5. n –ші ретті анықтауышты Лаплас теоремасының көмегімен есептеуге үйрету.

1.1 Негізгі теориялық мәлімет

nxn өлшемді әрбір квадрат кестеге белгілі бір заңмен ***n-ші ретті анықтауыш*** деп аталатын сан сәйкестендіріледі. Анықтауыштың белгісі: $|A|$ немесе Δ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n -ретті анықтауыш $n!$=1*2*3…*n мүшелердің алгебралық қосындысына тең болады, ондағы әрбір қосылғыш осы матрицаның n жолы мен n бағанасынан әрқайсысынан бір-бірден алынған n элементтің көбейтіндісіне тең, ол қосылғыштардың жартысы өз таңбаларымен, ал қалғандары қарама-қарсы таңбамен алынады.

Анықтауыштың дербес жағдайлары екінші және үшінші ретті анықтауыштарды қарастырамыз.

Екінші ретті анықтауыш $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}$ таңбасымен көрсетілген сандық шама. Анықтауыштың a_{11}, a_{22} сандар орналасқан диагоналі бас диагональ деп, ал a_{12}, a_{21} сандар орналасқан диагональді- қосымша (кері) диагональ деп атайды.

2-ші ретті анықтауыш мына формуламен есептеледі:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (1)$$

Екінші ретті анықтауышты есептеу ұшын оның бас диагональ бойындағы элементтерінің көбейтіндісімен қосымша диагональ бойындағы элементтерінің көбейтіндісінің айырымын табу керек.

Мысал

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 15 & 3 \end{vmatrix}$ анықтауышты есептеу керек.

Шешімі:

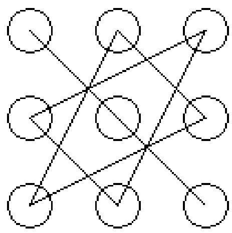
(1) формуланы қолданып, екінші ретті анықтауышты табамыз

$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 15 & 3 \end{vmatrix}$ = 5*3-(-20*15) = 15+30 = 45.

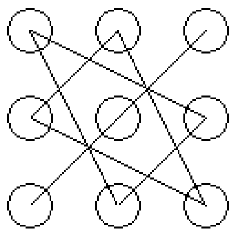
Үшінші ретті анықтауыш мына формуламен есептеледі:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \quad (2)$$

(2) теңдіктің оң жағында қайсы көбейтінділер «+» таңбасымен, қайсы көбейтінділер «-» таңбасымен болатындығын еске сақтау үшін мына үшбұрыштар ережесін қолданған пайдалы:



$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$



Мысал. Келесі анықтауышты есетейік: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

Шешімі: үшбұрыштар ережесін қолданып (2) деп белгіленген көбейтінділерді есептейміз:

1: 1*(-1)*(-2)=2; 4*(-7)*3=-84; 2*5*6=60.

2: 6*(-1)*3=-18; 4*2*(-2)=-16; (-7)*5*1=-35.

Соңғы кобейтінділер (2)- ге теріс таңбамен жазылады. Сонымен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2-84+60+18+16+35 = 47.$$

Үшбұрыш әдісін меңгергендерге ескерту. (2)-ге кіретін көбейтінділерді бөлек есептеу қажеті жоқ. Бәрінде бір жолға жазып, тек қана таңбасын ескере отырып есептеуге болады.

Анықтауыштың негізгі қасиеттері:

1^0. Анықтауыштың жолдарын сәйкес бағаналарымен ауыстырғаннан оның анықтауышы өзгермейді.

Үшінші ретті анықтауыш үшін:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2^0. Анықтауыштың екі жолын (бағанасын) өзара ауыстырғаннан оның таңбасы қарама-қарсыға өзгереді.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \quad \text{немесе} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{21} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

3^0. Жол (бағана) элементтерінің ортақ көбейткішін анықтауыш алдына шығаруға болады.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4^0. Егер анықтауыштың кейбір жолының (бағанасының) барлық элементтері нольге тең болса, онда анықтауыш нольге тең болады.

5^0. Егер анықтауыштың кез келген екі жолының (бағанасының) элементтері пропорционал болса, онда анықтауыш нольге тең болады.

6^0. Егер анықтауыштың кез келген екі жолының (бағанасының) сәйкес элементтері тең болса, онда анықтауыш нольге тең болады.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

7^0. Егер матрицаның бір жолының (бағанасының) элементтерін кез келген санға көбейтіп, екінші жолының (бағанасының) сәйкес элементтеріне қоссақ, онда оның анықтауышы өзгермейді.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8^0. Егер анықтауыштың кез келген жолының (бағанасының) барлық элементтері қосындыдан тұрса, онда анықтауыш екі анықтауыштың қосындысына тең, бірінші анықтауыштың осы жолында бірінші қосылғыш, екінші анықтауыштың осы жолында екінші қосылғыш тұрады, ал қалған элементтері үш анықтауышта бірдей болады.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a'_{21} & a'_{22}+a'_{22} & a'_{23}+a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Анықтауыштың мына қасиеттері минор және алгебралық толықтауыш ұғымдарымен байланысты.

a_{ij} элементінің M_{ij} ***миноры*** деп осы элемент қиылысында тұрған i-ші жол мен j-ші бағананы сызып, қалған элементтерден алынған анықтауыш аталады.

a_{ij} элементінің ***алгебралық толықтауышы*** деп $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ саны аталады.

9^0. (*Лаплас теоремасы*) Анықтауыш әр жол (бағана) элементтері мен олардың сәйкес алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысына тең.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad 1 \le i \le n \quad (3)$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad 1 \le j \le n \quad (4)$$

(3) формула анықтауышты i-ші жол бойынша, ал (4) формула анықтауышты j-ші бағана бойынша жіктеу деп аталады. Бұл екі формула жоғары ретті анықтауыштарды есептеуге қолданылады.[1]

Мысал. (екінші баған арқылы жәктеу)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1+9) - 4(6-2) = -8 - 16 = -\underline{24}.$$

10^0. Анықтауыштың кез келген жолы (бағанасы) элементері мен басқа жолы (бағанасы) элементтерінің сәйкес алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы нольге тең.

Анықтауыштардың қасиеттері оларды есептеу процессін жеңілдетеді.

Анықтама. *n –ші ретті анықтауыш (детерминант) деп, әрбір қосылғышы анықтауыштың n жолы мен n бағанының әрқайсысынан бір-бірден алынған n элементтің қөбейтіндісіне тең n! мүшелердің алгебралық қосындысы аталады.*

1.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар:

1.Екінші ретті анықтауыш, оны есептеу ережесі.

2.Анықтауыш дегеніміз сан болама, кесте болама?

3.Үшінші ретті анықтауыш, оны есептеу ережесі.

4. Қандай жағдайда анықтауыш нөлге тең болады?
5. Қандай жағдайда анықтауыштың таңбасы қарсы өзгереді?
6. Қандай жағдайда анықтауыш екі анықтауыштың қосындысы түрінде жазылады?
7. Минор дегеніміз не?
8. Алгебралық толықтауыш дегеніміз не?
9. Лаплас теоремасы (элементтер бойынша жіктеу).
10. Жоғары ретті анықтауыштар қандай әдістермен есептеледі?

1.3 Есептер шығару

1 Анықтауышты есептеңіз

1.1 $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ **1.2** $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ **1.3** $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

1.4 x-тің қандай мәнінде $\begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ анықтауышы 7 тең болатынын көрсетіңіз

1.5 x-тің қандай мәнінде $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{vmatrix}$ анықтауыш 3 болатынын көрсетіңіз

1.6 $\begin{vmatrix} x & x \\ 3 & x \end{vmatrix}$ анықтауышы -2 болатын x-тің ең кіші мәнін табыңыз

1.7 $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 4 & x^2 \end{vmatrix}$ Анықтауышы -3 болатын x-тің ең кіші мәнін табыңыз

1.8 $\begin{vmatrix} x & -x \\ 1 & x \end{vmatrix}$ Анықтауышы 2 болатын x-тің теріс мәнін табыңыз

2 M_{ij} минорын табыңыз

2.1 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $M_{21}=?$ **2.2** $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $M_{32}=?$ **2.3** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_{13}=?$

2.4 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M_{31}=?$ **2.5** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $M_{23}=?$ **2.6** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{33}=?$

3 A_{ij} алгебралық толықтаушын табыңыз

3.1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{23}=?$ **3.2** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_{32}=?$ **3.3** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A_{31}=?$

3.4 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, A_{22}=?$ **3.5** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_{13}=?$ **3.6** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}, A_{32}=?$

4 Үшінші ретті анықтауышты есептеңіз

4.1 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **4.2** $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ **4.3** $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

4.4 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **4.5** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ **4.6** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

4.7 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **4.8** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ **4.9** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

5 Анықтауышты есептеңіз

5.1 $\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ -1 & -a & 1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix}$ **5.2** $\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{vmatrix}$ **5.3** $\begin{vmatrix} -a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & -a \end{vmatrix}$ **5.4** $\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}$

6 Анықтауышты есептеңіз

6.1 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ **6.2** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ **6.3** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \\ 12 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

6.4 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \\ 8 & 12 & -3 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ **6.5** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 12 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ **6.6** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ -15 & 7 & 12 & -5 \end{vmatrix}$

6.7 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$ **6.8** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **6.9** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 8 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 12 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

2-тақырып. МАТРИЦАЛАР.

Дәріс мақсаты: Матрица ұғымын енгізу және матрицалық есептеулермен таныстыру.

Дәріс жоспары:
1 Матрица түрлері.
2 Матрицаларға қолданылатын сызықтық амалдар және олардың қасиеттері.
3 Матрицаларды көбейту. Аударылған (транспонирленген) матрицалар.

1.1 Негізгі теориялық мәлімет

Сандардың $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ түріндегі тікбұрышты кестесі $m \times n$ өлшемді ***матрица*** деп аталады. Мұнда a_{ij} (i=1,…,m; j=1,…,n) - нақты сандар, матрицаның элементі деп аталады, i және j - сәйкес жолдар мен бағаналардың индекстері.

Матрицаның қысқаша түрде жазылуы: A=(a_{ij}), (i=1,…,m; j=1,…,n).

Барлық элементтері нольге тең матрица ***нольдік матрица*** деп аталады.

Егер матрицаның жолдар саны мен бағаналар саны тең болса, онда матрица ***квадрат матрица*** деп аталады:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a_{ii} (i=1,2,…n) элементерінің реттелген жиынтығы квадрат матрицаның бас диагоналі деп аталады.

Егер квадрат матрицаның элементтері $a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \neq 0 & i = j \\ a_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$ шартын қанағаттандырса, онда ол диагональ матрица деп аталады.

Диагональ матрица мына түрде болады:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Бас диагоналінің барлық элементтері бірге тең болатын диагональ матрица ***бірлік матрица*** деп аталады:

$$E = \begin{cases} a_{ij} = 1 & i = j \\ a_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{немесе} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Егер А және В екі матрицаның өлшемдері бірдей және сәйкес элементтері тең $a_{ij} = b_{ij}$ (i=1,…,m; j=1,…,n) болса, онда олар ***тең*** матрицалар деп аталады.

Өлшемдері бірдей А және В матрицаларының ***қосындысы*** деп элементері $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (i=1,…,m; j=1,…,n) болатын С=А+В матрицасы аталады.

А матрицасының α санына ***көбейтіндісі*** деп элементері $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ болатын С матрицасы аталады.

Сызықтық амалдардың матрицаларға қолданылуы келесі қасиеттерді қанағаттандырады:

1^0 A+B = B+A $4^0$$(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$ 7^0. $0\cdot A = 0$

2^0(A+B)+C = A+(B+C) $5^0$$(\alpha\beta)A = (\alpha A)\beta$

$3^0$$\alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B$ 6^0.A+0 = A

Мұнда А,В және С өлшемдері бірдей матрицалар, ал α және β – кез келген нақты сандар, 0 – нольдік матрица.

Матрицаның жолдарын ретін сақтап сәйкес бағаналарымен алмастыру, матрицаны ***орын алмастыру (транспонирлеу)*** деп аталады. Орын алмасқан матрицаның белгісі: A', (A^T)

Матрицалардың ауыстырымдылық операциясына тән қасиеттер:

1^0 $A' = A$

2^0 $(\alpha A)' = \alpha A'$

3^0 $(A+B)' = A' + B'$

4^0Квадрат матрицаны орын алмастырғанда оның бас диагоналінің элементтері өзгермейді.

А және В матрицаларының ***көбейтіндісі*** деп элементтері c_{ij} А матрицасының вектор-жолдары мен В матрицасының вектор-бағаналарының скаляр көбейтіндісіне тең болатын С матрицасы аталады.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj} \quad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,n$$

Ескерту: А матрицасын В матрицасына көбейту мүмкін болуы үшін, бірінші матрицаның бағаналар саны екінші матрицаның жолдар санына тең болуы тиіс.

Егер көбейткіш матрицалардың өлшемдері m×n және n×k болса, онда көбейтінді матрицаның өлшемі m×k болады.[1]

Мысал. А және В матрицалардың көбейтіндісін тап

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Шешімі: А матрицасы 2×3 өлшемді, В матрицасы 3×3 өлшемді, онда $AB = C$ матрицасы табылады, және C матрицасының элементтері:
$c_{11} = 1\times1 + 2\times2 + 1\times3 = 8$, $c_{21} = 3\times1 + 1\times2 + 0\times3 = 5$, $c_{12} = 1\times2 + 2\times0 + 1\times5 = 7$,
$c_{22} = 3\times2 + 1\times0 + 0\times5 = 6$, $c_{13} = 1\times3 + 2\times1 + 1\times4 = 9$, $c_{23} = 3\times3 + 1\times1 + 0\times4 = 10$.
тең болады. Сонда,

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

ал BA матрицасының көбейтіндісі болмайды.

Мысал. А және В матрицалардың көбейтіндісін тап

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Шешімі.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \quad 4 \quad 1) = \begin{pmatrix} 1\cdot2 & 1\cdot4 & 1\cdot1 \\ 4\cdot2 & 4\cdot4 & 4\cdot1 \\ 3\cdot2 & 3\cdot4 & 3\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA = (2 \quad 4 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot1 + 4\cdot4 + 1\cdot3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Матрицаларды көбейту амалы мына қасиеттерді қанағаттандырады:

1^0.(AB)C=A(BC); 4^0. α(AB)=(αA)B=A(αB),
2^0.(A+B)C=AC+BC 5^0. AE=A;
3^0.A(B+C)=AB+AC 6^0. EA=A ;

мұнда α- кез келген нақты сан;

1.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар:

1. Матрица дегеніміз не?
2. Матрицаның өлшемі дегеніміз не?
3. Қандай матрица нөлдік, диагональ, бірлік, квадрат деп аталады?
4. Қандай матрицалар тең матрицалар деп аталады?
5. Қандай матрица орын ауыстырылған матрица деп аталады?
6. Екі матрицаның қосындысы немесе айырмасы болу үшін қандай шарт орындалуы қажет?
7. Матрицаларға қолданылатын сызықтық амалдар: матрицалардың қосындысы, матрицаны санға көбейту.
8. Матрицаларға қолданылатын сызықтық амалдар қандай қасиеттерді қанағаттандырады?
9. Екі матрицаның көбейтіндісі дегеніміз не?

10. Екі матрицаның көбейтіндісі болуы үшін қандай шарт орындалуы қажет?
11. Қандай қасиет бірлік матрицаға тән сипаттамалық қасиет болып табылады?

1.3 Есептер шығару:

1.1 $A+B$ матрицаларының қосындысын тап, егер

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

1.2 A - B матрицаларың айырмасын тап, егер $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

1.3 Матрицалардың сызықтық комбинациясын есептеп $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, оның a_{22} элементін табыңыз

1.4 Матрицалардың сызықтық комбинациясын есептеп $2\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, оның a_{12} элементін табыңыз

1.5 $3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ матрицалардың сызықтық комбинациясының a_{23} элементін есептеңіз

2 Матрицаның диагональды элементтерінің қосындысын есептеңіз

2.1 $E-\lambda \cdot A$, егер $\lambda = 0{,}5$ и $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

2.2 $E-\lambda \cdot A'$, егер $\lambda = 3$ и $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

2.3 $A'-\lambda \cdot E$, егер $\lambda = 2$ и $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

3 Матрицалардың көбейтіндісінің мағынасы жоғын көрсетіңіз

3.1

A) $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

3.2 A) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 6\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 6\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 6\end{pmatrix}$

3.3 A) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 6\end{pmatrix}$

4 **А матрица мен В матрицасының көбейтіндісін табыңыз, егер:**

4.1 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

4.2 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

4.3 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

4.4 $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

4.5 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

4.6 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

5 **А матрицасы үшін A^2 табыңыз**

5.1 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

5.2 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

5.3 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$

5.4 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$

6 A^2 **матрицасының көрсетілген** a_{ij} **элементін есептеңіз**

6.1 a_{13}, егер $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$

6.2 a_{21}, егер $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

6.3 a_{32}, егер $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$

6.4 a_{12}, егер $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\0&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$

7 ***C = A·B*** **матрицасының көрсетілген c_{ij} элементін есептеңіз**

7.1 c_{23}, егер $A=\begin{pmatrix}4&3&1\\0&1&2\\2&4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&5&3\\2&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$

7.2 c_{12}, егер $A=\begin{pmatrix}2&4&3\\5&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&4\\2&1&5\end{pmatrix}$

7.3 c_{22}, егер $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&3\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&5\\2&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$

7.4 c_{13}, егер $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&2&1\\4&3&1\end{pmatrix}$

Матрицалар көбейтіндісінің диагональ элементтерінің қосындысын табыңыз

7.5 $\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$

7.6 $\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$

7.7 $\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&1\\1&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$

7.8 $\begin{pmatrix}2&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}$

8.1 $A'B$ көбейтіндісін есептеңіз, егер $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$

8.2 $A'B'$ көбейтіндісін есептеңіз, егер $A=\begin{pmatrix}1&3\\-2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$

8.3 $(A\cdot B)'$ көбейтіндісін есептеңіз егер $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1\\2&1\end{pmatrix}$

8.4 $A'B$, матрицалар көбейтіндісінің a_{12} элементін есептеңіз, егер

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}$

8.5 $A'B$, матрицалар көбейтіндісінің a_{23} элементін есептеңіз, егер $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$

8.6 $A\cdot B'$, матрицалар көбейтіндісінің a_{22} элементін есептеңіз, егер

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

8.7 $(A \cdot B)'$, $A' B$, матрицалар көбейтіндісінің a_{22} элементін есептеңіз, егер $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9 **А және В матрицаларының көбейтіндісн тап:**

9.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

9.2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

9.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

9.4 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

9.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

9.6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3-тақырып. КЕРІ МАТРИЦА.

Дәріс мақсаты: Кері матрица, матрица рангі ұғымдарын енгізу және матрицаның элементар түрлендіруімен таныстыру. Матрицалардың экономикалық түсініктемесін беру.

Дәріс жоспары:

1 Матрицаның элементар түрлендірулері.
2 Матрица рангі.
3 Кері матрицаның анықтамасы.
4 Кері матрица бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары.
5 Матрицалардың экономикалық түсініктемесі.

1.1 Негізгі теориялық мәлімет

Матрицаның элементар түрлендірулері:

1. нольдік жолды (бағананы) тастап кету;
2. матрица жолының (бағанасының) барлық элементтерін нольге тең емес санға көбейту;
3. матрица жолының (бағанасының) ретін өзгерту;
4. бір жолдың (бағананың) барлық элементтеріне екінші жолдың (бағананың) сәйкес элементтерін кез келген санға көбейтіп қосу;
5. орын алмасқан матрица алу.

А матрицасының ***k –ретті миноры*** деп k жол мен k бағананың қиылысында тұрған элементтерден құралған анықтауыш аталады.

Егер анықтауышы нольге тең (тең емес) болса, онда квадрат матрица ***нұқсанды (нұқсанды емес)*** деп аталады.
А матрицасы – нұқсанды (ерекше) <=> |A| = 0;
А матрицасы – нұқсанды емес (ерекше емес) <=> |A| ≠ 0

А матрицасының ең үлкен нольден өзгеше минорының реті осы матрицаның ***рангі*** деп аталады. *A* матрицаның рангі *r(A)* деп белгіленеді
Мына арақатынас орындалатыны анық: $0 \le r(\boldsymbol{A}) \le \min(m, n)$.
Бұл анықтамадан:
а) $A_{m\times n}$ матрицасының рангі оның өлшемінің ең кішісінен артпайды;
б) матрицаның барлық элементтері нольге тең болғанда сонда тек қана сонда r(A)=0 болады;
в) А матрицасы нұқсанды емес болса, сонда тек қана сонда *n*-ретті квадрат матрица үшін r(A) = *n* болады.
г) егер матрица рангы $r(A) = r$ болса, онда $r+1$ ретті минордан бастап жоғарғы ретті минорлардың барлығы нөлге тең болады.
Матрица рангысының қасиеттері:
1^0. Матрицаны транспонирлегеннен оның рангысы өзгермейді.
2^0. Матрицаның жолын(бағанын) ауыстырғаннан оның рангысы өэгермейді.
3^0. Матрицаның бір жолының(бағанының) барлық элементтерін бірдей санға көбейткеннен рангы өэгермейді.
4^0. Матрицаның бір жолына(бағанына) басқа жолдың(бағанының) сәйкес элементтерін бірдей санға көбейтіп қосқаннан оның рангысы өэгермейді.
5^0. Матрицаның бір жол(баған) элементтері толығымен нөлге тең болғанда, оны алып тастағаннан рангы өэгермейді.
6^0. Егер матрицаның бір жолы(бағаны) басқа жолдардың(бағандардың) сызықты комбинациясы болғанда, оны алып тастағаннан, матрицаның рангысы өэгермейді.

Теорема. Матрицаның элементар түрлендірулері оның рангін өзгертпейді.

Теорема. Матрица рангі олар арқылы қалған жолдары (бағаналары) өрнектелетін ең көп сызықтық тәуелсіз жолдар немесе бағаналар санына тең.

Егер оларды өзара көбейткенде бірлік матрица шықса, онда A^{-1} матрицасы А квадрат матрицасына қарағанда ***кері матрица*** деп аталады: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Теорема. A^{-1} кері матрицасы бар болуы үшін А матрицасының нұқсанды емес болуы қажетті және жеткілікті.

Егер элементтері A' матрицасының алгебралық толықтауыштары болса, онда n- ші ретті $\overline{A}$ квадрат матрицасы ***біріктірілген матрица*** деп аталады. Кері матрица мына формуламен есептеледі: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\overline{A}$, мұнда

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ – біріктірілген матрица.

Кері матрица табудың Жордан-Гаусс деп аталатын қарапайым тәсілі бар. Ол үшін А матрицасының оң жағына бірлік матрица Е тіркеліп жазылады. Содан соң шыққан кеңейтілген матрицаның (А/Е) жолдарына элементар түрлендірулер жасау арқылы А матрицасы бірлік матрица түріне келтіріледі. Осы есептеулер процессі аяқталған соң, яғни А матрицасының орнында бірлік матрица шыққан соң оң жақтағы бірлік матрица Е тұрған жерде кері матрица A^{-1} пайда болады. Басқаша айтқанда (А/Е) кеңейтілген матрицаның орнында (E/A^{-1}) кеңейтілген матрица шығады. [1]

Мысал. Элементар түрлендіру әдісімен *А* түріндегі матрицаның рангін табыңыз

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Шешімі Матрицаның рангін табу үшін бастапқы матрицаны тең рангілі трапециялық матрицаға айналдырамыз. Сонымен қатар, біз негізгі диагональдан төмен тұрған барлық элементтерін нөлге айналдырып, ал негізгі диагональда тұрған барлық элементтер нөлден өзгеше болуын мақсат етеміз (нөлдік жолдарда тұрған соңғылардан басқа). Қажетті матрица түріне келтіріп алдық және оның рангі бастапқы матрицаның рангісіне сәйкес келеді.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ерекше емес шаршы субматрицаны анықтау оңай (3-ші ретті).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Сондықтан, |A| матрицаның рангі 3 тең. (Жауабы: rang |A| = 3).

Мысал. Нұқсанды емес $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасы берілген.

1) A^{-1} кері матрицасын тап;

2) матрицаларды көбейту ережесін пайдаланып $A \times A^{-1} = E$ теңдігі орындалатынын көрсет, мұнда *E* – бірлік матрица.

Шешімі:

Кері матрицаны $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ формуласымен табамыз, мұнда A_{ij} – a_{ij}

элементтерінің алгебралық толықтауыштары. А матрицасының анықтауышын есептейміз: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 0 - (2 + 0 + 0) = 1$.

A_{ij}–алгебралық толықтауыштарын табамыз:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$ $\quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$ $\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

Формула бойынша кері матрицаны есептейміз: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

2) матрицаларды көбейту ережесін пайдаланып $A \times A^{-1} = E$ теңдігі орындалатынын көрсет, мұнда E – бірлік матрица.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4-2 & -2+6-4 & 1-2+1 \\ -2+2 & -3+4 & 1-1 \\ -2+2 & -4+4 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Тексеруге арналған сұрақтар:

1. Матрицаның рангі дегеніміз не?
2. Матрица рангі қай уақытта нольге тең болады?
3. Кері матрица деп қандай матрица аталады?
4. Қандай матрица нұқсанды матрица деп аталады?
5. Қандай матрица нұқсанды емес матрица деп аталады?
6. Кері матрица болу шарты қандай?
7. Қандай матрица орын алмасқан деп аталады?
8. Қандай матрица біріктірілген деп аталады?

1.3 Есептер шығару:

1 А матрицаға кері матрицаны тап

1.1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 1.2 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. $\qquad$ 1.4 $A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

2 **А матрицаға кері A^{-1} матрицасын тап**

2.1 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ -1 & 4 & 1\\ 1 & 9 & -2\end{pmatrix}$

2.2 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

2.3 $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ 5 & 3 & -2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$

2.4 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

2.5 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$

2.6 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

3 **Матрицаның рангін есепте:**

3.1 $\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 3\\ -2 & 0 & 4 & -5\\ 2 & 0 & -4 & 6\end{pmatrix}$

3.2 $\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$

3.3 $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$

3.4 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$

3.5 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 1 & 0\\ 3 & -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$

4.1 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & x\\ 0 & 2 & 6\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}$ матрицасы x-тің қандай мәнінде нұқсанды болады

1.2 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ x & 4 & 4\\ 2 & 1 & 7\end{pmatrix}$ матрицасы x-тің қандай мәнінде нұқсанды болады

1.3 x-тің қандай мәнінде $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & x\\ 0 & 2 & 6\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}$ матрицасында кері болмайды

1.4 x-тің қандай мәнінде $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & x & 3\\ x & 3 & 1\end{pmatrix}$ матрицасында кері болмайды?

4 тақырып. Сызықтық теңдеулер жүйесі

Дәріс мақсаты: Сызықтық теңдеулер жүйесін шешу әдістерімен таныстыру

Дәріс жоспары:

1 Негізгі ұғымдар.

2 Теңдеулер жүйелерінің үйлесімділігі. Кронекер-Капелли теоремасы.

3 Сызықтық теңдеулер жүйесін элементар түрлендірулер.

4 Белгісіздер саны мен теңдеулер саны бірдей теңдеулер жүйесін шешу. Матрицалық теңдеулерді шешу. Матрицалық тәсіл.

5 Крамер ережесі.

1.1 Негізгі теориялық мәлімет

n белгісізі (айнымалысы) бар *m* сызықтық теңдеулер жүйесі мына түрде болады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Мұнда a_{ij} және b_i $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ кез келген нақты сандар, олар сәйкес (1) теңдеулер жүйесіндегі *белгісіздер коэффициенттері* және *бос мүшелер* деп аталады.

Жүйенің қысқаша жазылуы: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ \left(i=\overline{1,m}\right)$.

Жүйенің әр теңдеуінде белгісіздердің орнына қойғанда оларды тепе-теңдікке айналдыратын *n* нақты сандар жиыны $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots\ ,x_n = \alpha_n$ ***теңдеулер жүйесінің шешімі*** деп аталады.

Егер (1) жүйенің ең болмағанда бір шешімі болса, онда ол ***үйлесімді***, ал бірде-бір шешімі болмаса, онда ол ***үйлесімсіз*** деп аталады. Үйлесімді теңдеулер жүйесінің бір ғана шешімі болса, онда ол ***анықталған,*** ал шешімі бірден артық болса, онда ол ***анықталмаған*** жүйе деп аталады.

(1) түріндегі екі теңдеулер жүйесінің шешімдер жиыны бірдей болса, онда олар ***эквивалентті*** немесе мәндес деп аталады. Жүйені элементар түрлендірулер оны эквивалентті (мәндес) жүйеге келтіреді.

Сызықтық теңдеулер жүйесінің элементар түрлендірулері.

– $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = 0$ - теңдеуін сызып тастау;

–жүйедегі теңдеулердің немесе теңдеудегі $a_{ij}x_j$ қосылғыштардың орнын ауыстыру;

–жүйедегі бір теңдеудің екі бөлігіне, екінші теңдеудің сәйкес екі бөлігін кез келген нақты санға көбейтіп қосу;

–жүйедегі басқа теңдеулердің сызықтық комбинациясы болатын теңдеуді жүйеден алып тастау.

(1) жүйенің белгісіздерінің коэффициенттерінен құралған А матрицасы ***жүйе матрицасы*** деп аталады:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

А матрицасына бос мүшелерден тұратын бағананы қоссақ, онда жүйенің ***кеңейтілген матрицасы*** пайда болады:

$$A_B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad (3)$$

Жүйенің кеңейтілген матрицасы A_B деп белгіленеді.

Екі бағана матрица енгізейік: $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$.

X - белгісіздер матрицасы және В- бос мүшелер матрицасы.

Сонда (1) сызықтық теңдеулер жүйесін матрицалық түрде $AX=B$ деп жазуға болады. Осы теңдіктің екі бөлігіне A^{-1} матрицасын көбейтеміз. Сонда $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$ теңдігі шығады. Бұл теңдіктен $A^{-1}\cdot A=E$ болғандықтан $E\cdot X=A^{-1}\cdot B$ теңдігін аламыз. Бұдан $E\cdot X=X$ болғандықтан $X=A^{-1}\cdot B$ болады. Осы теңдік арқылы белгісіздер саны мен теңдеулер саны бірдей сызықтық теңдеулер жүйесін матрицалық түрде шешуге болады. [1]

Мысал. Сызықтық теңдеулер жүйесін матрицалық түрде жаз және оны кері матрица көмегімен шеш:

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+2x_3=-12 \\ 3x_1+x_2-2x_3=1 \\ -x_1+3x_2-2x_3=9 \end{cases} \quad (1)$$

Шешуі:

Белгісіздер коэффициенттерінен A матрицасын, $x_1,\ x_2,\ x_3$ белгісіздерден X және бос мүшелерден B матрицаларын құрамыз:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(1) жүйенің сол жағын $A * X$ матрицаларының көбейтіндісі түрінде, ал оң жағын B матрицасы арқылы жазамыз. Сонда (1) жүйе матрицалық теңдеу түрінде жазылады:

$$A * X = B. \quad (2)$$

Егер A матрицасының анықтауышы нольден өзгеше болса, онда A матрицасының кері матрица A^{-1}табылады. (2) теңдіктің екі бөлігіне сол жағынан A^{-1} матрицасын көбейтеміз:

$$A^{-1} * A * X = A^{-1} * B$$

$A^{-1} * A = E$ және $E * X = X$ болғандықтан

$$X = A^{-1} * B. \quad (3)$$

(3) формула сызықтық теңдеулер жүйесін шешудің матрицалық түрде жазылуы деп аталады. (3) формуланы қолдану үшін ең әуелі A^{-1} кері матрицасын табу қажет.

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4;\quad A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & -2 & 10 \\ 10 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$

(3) формулаға матрицаларды қойып жүйенің шешуін табамыз:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & -2 & 10 \\ 10 & -2 & 14 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

яғни жүйенің шешуі $x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$ болады.

Теорема (Крамер ережесі).

Белгісіздер саны жүйенің теңдеулер санына тең (m=n) болсын. Жүйе матрицасының анықтауышын $|A|$ деп, ал $|A|$ анықтауышындағы *j* бағанасын бос мүшелер бағанасымен В алмастырғаннан шыққан анықтауышты $|A_j|$ деп белгілейік. Сонда егер $|A| \neq 0$ болса, онда сызықтық теңдеулер жүйесінің жалғыз ғана шешімі болады және ол мына формуламен анықталады: [1]

$$x_i = \frac{|A_j|}{|A|}, \ (j = 1, 2, \ \ldots, n) \ |A| \neq 0 \ (4)$$

Мысал. Берілген сызықтық теңдеулер жүйесін Крамер әдісі арқылы шешу:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - 2y + 3z = -4 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Шешуі: Крамер әдісі анықтауыштарды қолдануды қамтиды. Біріншіден, жүйенің негізгі матрицасының анықтауышын табамыз:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2((-2\cdot 2) - (3\cdot 1)) - 1((1\cdot 2) - (3\cdot 3)) + (-1)((1\cdot 1) - (3\cdot(-2)))$$

$$|A| = 2(-4-3) - 1(2-9) + (-1)(1+6)$$

$$|A| = 2(-7) - 1(-7) + (-1)(7)$$

$$|A| = -14 + 7 - 7 = -14$$

Енді матрицалардың A_x, A_y, A_z анықтауштарын табамыз:

$$A_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A_x| = 3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A_x| = 3((-2\cdot 2) - (3\cdot 1)) - 1((-4\cdot 2) - (3\cdot 5)) + (-1)((-4\cdot 1) - (-2\cdot 5))$$

$$|A_x| = 3(-4-3) - 1(-8-15) + (-1)(-4+10)$$

$$|A_x| = 3(-7) - 1(-23) + (-1)(6)$$

$$|A_x| = -21 + 23 - 6 = -4$$

$$A_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A_y| = 2\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A_y| = 2((-4 \cdot 2) - (3 \cdot 5)) - 3((1 \cdot 2) - (3 \cdot 3)) + (-1)((1 \cdot 5) - (-4 \cdot 3))$$

$$|A_y| = 2(-8 - 15) - 3(2 - 9) + (-1)(5 + 12)$$

$$|A_y| = 2(-23) - 3(-7) + (-1)(17)$$

$$|A_y| = -46 + 21 - 17 = -42$$

$$A_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A_z| = 2\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A_z| = 2((-2 \cdot 5) - (-4 \cdot 1)) - 1((1 \cdot 5) - (-4 \cdot 3)) + 3((1 \cdot 1) - (-2 \cdot 3))$$

$$|A_z| = 2(-10 + 4) - 1(5 + 12) + 3(1 + 6)$$

$$|A_z| = 2(-6) - 1(17) + 3(7)$$

$$|A_z| = -12 - 17 + 21 = -8$$

Енді *x, y, z* шешімдерін табамыз:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-4}{-14} = \frac{2}{7}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-42}{-14} = 3$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-8}{-14} = \frac{4}{7}$$

Сонымен, жүйенің жауабы:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ y = 3 \\ z = \frac{4}{7} \end{cases}$$

1.2 Тексеруге арналған сұрақтар:

1. n белгісізі сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімі дегеніміз не?
2. Қандай сызықтық теңдеулер жүйесі үйлесімді және үйлесімсіз деп аталады?
3. Анықталған және анықталмаған сызықтық теңдеулер жүйесі.
4. Сызықтық теңдеулер жүйесінің жалпы және дербес шешімі.
5. Эквивалентті (мәндес) сызықтық теңдеулер жүйелері.
6. Сызықтық теңдеулер жүйесінің элементар түрлендірулері.
7. Сызықтық теңдеулер жүйесінің матрицасы және кеңейтілген матрицасы.
8. Сызықтық теңдеулер жүйесін Крамер формулалары бойынша шешу.

1.3 Есептер шығару:

1.Жүйені матрицалық әдіспен шеш:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

2.Жүйені Крамер формуласымен шеш:

а) $\begin{cases} 3x - 3y + 2x = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ 5x - 6y + 4z = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 5 \\ x - 5y + 2z = 3, \\ 2x + 3y + z = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = 9 \\ 6x - 5y + 2z = 17 \end{cases}$

3. Жүйелерді: а) Крамер формуласымен шеш;
б) матрицалық әдіспен шеш;

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x_1+2x_2+5x_3=4, \\ 3x_1+5x_2-3x_3=-1, \\ -2x_1-4x_2+3x_3=1. \end{cases}$ е) $\begin{cases} 0.5x_2+x_3=4 \\ x_1+x_2-x_3=5 \\ -2x_1+x_3=6 \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 7x_1+6x_2+3x_3+7x_4=3, \\ 3x_1+5x_2+7x_3+2x_4=-1, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+5x_4=1, \\ 5x_1+6x_2+5x_3+4x_4=2. \end{cases}$ з) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=9, \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=5, \\ 2x_1-5x_2+3x_3+x_4=16, \\ 4x_1+6x_2+2x_3-x_4=5. \end{cases}$

и) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+3x_4=-19, \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=6, \\ x_1+x_2+2x_3-3x_4=10, \\ 4x_1+6x_2+x_3-2x_4=-12. \end{cases}$ к) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=11, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=12, \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=13, \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=14. \end{cases}$

5-тақырып. Біртекті сызықтық теңдеулер жүйесі.

Дәріс мақсаты: Сызықтық теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешуді үйрету және біртекті теңдеулер жүйесімен таныстыру

Дәріс жоспары:

1 Жалпы сызықтық теңдеулер жүйесін шешу. Гаусс әдісі.
2 Біртекті сызықтық теңдеулер жүйесі.

1.1 Негізгі теориялық мәлімет

Сызықтық теңдеулер жүйесін шешудің ең тиімді әдісі – Гаусс әдісі. Бұл әдіспен кез келген жүйе шешіледі. Сондықтан оны универсал әдіс деп атайды. Гаусс әдісі – теңдеулер жүйесіндегі белгісіздерді біртіндеп жою әдісі.

n белгісізі бар *m* сызықтық теңдеулер жүйесі берілсін:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\ldots+a_{3n}x_n=b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Гаусс әдісімен шешу процесі екі этаптан тұрады. Бірінші этапта (тура жол) жүйе сатылы түрге келтіріледі. Екінші этапта (кері жол) сатылы жүйеден белгісіздер біртіндеп анықталады.

Гаусс әдісін толығырақ сипаттайық.

Тура жол. Бірінші этапта коэффициент $a_{11}\neq 0$ деп есептейік (егер $a_{11}=0$ болса, онда x_1 белгісізінің коэффициенті нольден өзгеше теңдеу жүйеде бірінші етіп жазылады). a_{11} коэффициентін жетекші коэффициент деп, ал ол тұрған теңдеуді жетекші теңдеу деп атаймыз.

Элементар түрлендірулерді қолданып, (1) жүйенің бірінші теңдеуінен басқа теңдеулерінде x_1 айнымалысын жоямыз. Ол үшін жетекші теңдеудің екі бөлігін $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$-ге көбейтіп, екінші теңдеуге мүшелеп қосамыз. Содан соң жетекші теңдеудің екі бөлігін $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ санына көбейтіп, жүйенің үшінші теңдеуіне қосамыз. Осы процесті жалғастыра отырып, берілген теңдеулер жүйесіне мәндес жүйе аламыз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad a'_{33}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (2)$$

Мұнда a'_{ij}, b'_i $(i, j = \overline{2,m})$ – коэффициенттердің және бос мүшелердің бірінші қадамнан кейін пайда болған жаңа мәндері.Осы сияқты $a'_{22} \neq 0$ элементін жетекші деп алып жүйенің бірінші және екінші теңдеулерінен басқа барлық теңдеулерінде x_2 белгісізін жоямыз және т.с.с.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (3)$$

Бұл процесті мүмкін болғанша жалғастыра береміз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{kk}^{(k-1)}x_k + \ldots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)} \end{cases} \qquad (4)$$

Егер (1) жүйені сатылы түрге келтіру процесінде нольдік теңдеулер (0=0) пайда болса, онда оларды алып тастаймыз. Ал егер $0=b_i$ түріндегі теңдеу шықса, онда ол берілген жүйенің үйлесімсіздігін көрсетеді.

Кері жол. Екінші этапта сатылы жүйе шешіледі. Егер сатылы жүйе трапеция түрінде болса, онда жүйеде шексіз көп шешім болады. Оны шешу үшін жүйенің соңғы теңдеуінен x_k белгісізін қалған $(x_{k+1},\ldots,x_n)$ белгісіздері арқылы өрнектейміз. Содан соң x_k мәнін төменнен екінші теңдеуге қоямыз да одан x_{k-1} белгісізін $(x_{k+1},\ldots,x_n)$ арқылы өрнектейміз. Осылайша $x_{k-2},\ldots,x_1$ белгісіздері табылады. Содан кейін ($x_{k+1},\ldots,x_n$) бос белгісіздеріне кез келген мәндер бере отырып жүйенің шексіз көп шешімдер жиынын табамыз.

1-ескерту. Егер сатылы жүйе үшбұрыш түрінде болса,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{mn}^{(m-1)}x_n = b_m^{(m-1)} \end{cases} \qquad (5)$$

онда жүйенің жалғыз шешімі болады. Соңғы теңдеуден x_n мәнін табамыз, оның үстіндегі теңдеуге қойып x_{n-1} табылады, жүйе бойынша жоғары көтеріле отырып қалған ($x_{n-2},\ldots,x_1$) белгісіздері табылады.

Егер сызықтық теңдеулер жүйесінің барлық бос мүшелері нольге тең болса, онда ол ***біртекті*** деп аталады. Біртекті сызықтық теңдеулер жүйесінің жалпы түрі мынадай болады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Біртекті сызықтық теңдеулер жүйесі әрқашан үйлесімді, себебі $x_i=0$ ($i=1,2,\ldots,n$) жиынтығы жүйенің барлық теңдеулерін қанағаттандырады. Бұл ***нольдік*** шешім деп аталады.

Теорема. Егер біртекті сызықтық теңдеулер жүйесінің рангі жүйедегі белгісіздер санынан кем болса, сонда тек қана сонда жүйеде нольдік емес шешім болады.

Салдар. Егер біртекті сызықтық теңдеулер жүйесінің теңдеулер саны белгісіздер санынан кем болса, онда жүйенің нольден өзгеше шешімі болады.

Салдар. Егер біртекті сызықтық теңдеулер жүйесінің теңдеулер саны белгісіздер санына тең болса, онда жүйе матрицасының анықтауышы нольге тең болғанда сонда тек қана сонда жүйенің нольден өзгеше шешімі болады.

Біртекті сызықтық теңдеулер жүйесі шешімдерінің кез келген сызықтық комбинациясы осы жүйенің шешімі болады. (6) біртекті жүйесінің барлық шешім-векторлар жиынынан базис таңдап алуға болады, яғни берілген жүйенің кез келген шешім векторы осы базистың векторларының сызықтық комбинациясы болады.Кез келген осындай базис біртекті сызықтық теңдеулер жүйесі шешімдердің фундаментальді жүйесі деп аталады.

Теорема. Егер (6) біртекті сызықтық теңдеулер жүйесінің рангі r белгісіздер санынан n кем болса, онда (6) жүйенің кез келген шешімдерінің фундаментальді жүйесі n – r шешімнен тұрады.[2]

Мысал: Гаусс әдісі арқылы теңдеулер жүйесін шешу:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

Шешуі: Кронекер-Капелли теоремасы бойынша, егер матрицаның рангі кеңейтілген матрицаның рангісіне тең болса, жүйе үйлесімді болады.

Элементар түрлендірулер арқылы матрицаның және кеңейтілген матрицаның рангісін табыңыз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} -15 \\ 13 \\ 9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 0 & 14 & -22 \\ 0 & 13 & -13 \end{pmatrix}\begin{matrix} -15 \\ -58 \\ -39 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 0 & 14 & -22 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} -15 \\ -58 \\ -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 0 & 14 & -22 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{matrix} -15 \\ -58 \\ -16 \end{matrix}$$

$rangA = rang(A/B) = 3$, рангтері тең болғандықтан, бұл жүйе үйлесімді.

Енді жүйедегі белгісіздерді табамыз.

Үшінші жолдан:

$-8x_3 = -16 \Rightarrow x_3 = 2$

Екінші жолдан:

$14x_2 - 44 = -58 \Rightarrow 14x_2 = -14 \Rightarrow x_2 = -1$

Бірінші жолдан:

$2x_1 - 5 - 12 = -15 \Rightarrow 2x_1 = -15 + 5 + 12 = 4 \Rightarrow x_1 = 2$

Жауабы:

$x_1 = 2; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 2;$

Мысал. ***Сызықтық теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шеш:***

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Шешуі: Жүйенің кеңейтілген матрицасын құрамыз және матрицаның элементар түрлендірулерін қолданып оны баспалдақ түрге келтіреміз:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 21 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 3 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \quad -3 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 21 \\ 0 & -3 & -5 & -29 \\ 0 & -1 & -15 & -63 \end{array}\right) \; -1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 21 \\ 0 & 1 & 15 & 63 \\ 0 & -3 & -5 & -29 \end{array}\right). \quad 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 21 \\ 0 & 1 & 15 & 63 \\ 0 & 0 & 40 & 160 \end{array}\right)$$ матрицаны қайтадан жүйе түрінде жазамыз: $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ x_2 + 15x_3 = 63 \\ 40x_3 = 160. \end{cases}.$$

Енді жүйедегі белгісіздерді табамыз.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ x_2 + 15x_3 = 63 \\ x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ x_2 + 15 \cdot 4 = 63 \\ x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ x_2 + 60 = 63 \\ x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 21 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 22 = 21 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

Жауабы: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 4$

1.2 Тексеруге арналған сұрақтар:

1. Сызықтық теңдеулер жүйесін Гаусс әдісі бойынша шешу.
2. Қандай сызықтық теңдеулер жүйесі біртекті деп аталады?
3. Қай жағдайда сызықтық теңдеулер жүйесінің нольдік емес шешімі болады?

1.3 Есептер шығару

Сызықтық теңдеулер жүйесін шеш

1 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 \quad + 2x_3 = 0 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

4 $\begin{cases} -4x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ -5x_1 - 22x_2 + 5x_3 + 43x_4 = 0 \end{cases}$

5 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_4 = 3 \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 + 8x_4 = 3 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

7 $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 - 7x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 - 11x_2 - 3x_3 + 2x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$

8

6-тақырып. Сызықтық алгебраның экономикада қолданылуы

Дәріс мақсаты: Сызықтық алгебра элементтерін кейбір экономикалық есептерді шешуге қолданып үйрету.

Дәріс жоспары:
1 Салааралық баланстың сызықтық моделі.
2 Халықаралық сауданың сызықтық моделі.

1.1 Негізгі теориялық мәлімет

Әрқайсысы біртекті өнім өндіретін екі (n=2) өндіріс саласы қарастырылсын. Өнімнің бір бөлігі бірінші және екінші саланың өндіріс ішіндегі тұтынуына, ал екінші бөлігі жеке және қоғамдық (материалдық өндіріс сферасынан тыс) түпкі тұтынудың мақсаттарына жұмсалсын.

Бір уақыт аралығында (жыл) өндіріс процессін қарастырайық.

Мына белгілеулерді енгізейік:

x_i – i саласының жалпы өнім көлемі (i = 1, 2);

x_{ij} –өндіру процесінде j-ші сала тұтынатын i–ші саланың өнім шығару көлемі (i, j = 1, 2);

y_i – i-ші саланың өндірістік емес тұтынуға арналған өнімінің түпкі көлемі.

Кез келген i –ші саланың жалпы өнім көлемі екі сала тұтынатын өнім көлемі мен түпкі өнім көлемінің қосындысынан тұратындықтан

$$x_i = \sum_{j=1}^{2} x_{ij} + y_i ,\ (i = 1, 2). \qquad (1)$$

(1) теңдеулер баланстық қатынастар деп аталады. Егер (1) теңдеуіне кіретін шамалардың бәрі құнмен өрнектелсе, онда әдетте құндық баланс қарастырылады. Егер j-ші саланың бір өнімін шығаруға жұмсалатын i-ші сала өнімінің шығынын көрсететін тікелей шығын коэффициенттерін енгізсек,

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j},\ (i, j = 1, 2) \qquad (2)$$

және кейбір уақыт аралығында a_{ij} коэффициенттері тұрақты, ол қалыптасқан өндіріс технологиясына тәуелді десек, яғни

$$x_{ij} = a_{ij}\ \mathrm{x}_{j},\quad (\mathrm{i,j=1,2}), \qquad (3)$$

онда (1) баланстық қатынас мына түрде болады:

$$x_i = \sum_{i=1}^{2} a_{ij} x_j + y_i ,\ (\mathrm{i=1,2}). \qquad (4)$$

2-ескерту. a_{ij} коэффициенттері тұрақты деген келісім (3) теңдеу салдары материалдық шығындар жалпы өнімнен сызықтық тәуелді екенін білдіреді.

Сондықтан (4) салааралық баланс моделі ***сызықтық*** деп аталады.

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$ деп белгілейік

Мұнда X – жалпы өнім векторы, Y – түпкі өнім векторы, A – тікелей шығын матрицасы. Сонда (4) теңдеуін матрицалық түрде жазуға болады:

$$X=AX+Y \text{ немесе } (E-A)X=Y, \qquad (5)$$

мұнда E – бірлік матрица.

Енді, бірінші өндіріс түпкі өнім көлемін m есе арттырады деп есептейік. Сонда түпкі өнім векторы өзгереді $Y=\begin{pmatrix} my_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Егер қалыптасқан өндіріс технологиясында A шығын матрицасы өзгермейді десек, онда (5) матрицалық теңдеуінен жаңа Y векторына сәйкес X жалпы өнім векторын табуға болады. Саларалық баланстың негізгі мақсаты осы болып табылады. (5) теңдеудің екі бөлігін $(E-A)^{-1}$-ге көбейтсек, онда шешімді матрицалық түрде аламыз:

$$X=(E-A)^{-1}Y \qquad (6)$$

$S=(E-A)^{-1}$ матрицасы толық шығын матрицасы деп аталады. Есептің экономикалық мағынасына байланысты X,Y және A матрицаларының элементтері теріс емес болады. (5) теңдеуінің шешімі болу үшін A матрицасының кез келген бағанасы элементтерінің қосындысы бірден артпауы және ең болмағанда бір бағанасы үшін бұл қосынды бірден кіші болуы қажет.[2] n мемлекеттің S_1, S_2, …, S_n ұлттық табыстары сәйкес x_1, x_2, …, x_n болсын. a_{ij} коэффициенті арқылы S_j мемлекетінің S_i мемлекетінен тауар алу үшін жұмсайтын ұлттық табысының бөлігін белгілейік. Барлық бюджет мемлекет ішінен немесе сырттан тауар алуға жұмсалады деп есептейік, яғни:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1(j=1,2...,n) \qquad (7)$$

Сауданың құрлымдық матрицасы деп аталатын

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ ...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}\ a_{n2}\ ...a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрицасын қарастырайық. (7) теңдеуіне сәйкес A матрицасының кез келген бағанасының элементтерінің қосындысы бірге тең.

Кез келген S_i *(i=1, 2, ...,n)* мемлекеті үшін ішкі және сыртқы саудадан түскен табыс: $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$. Балансты сауда үшін әр S_i мемлекетінің саудасында тауар тапшылығы болмауы қажет, яғни саудадан түскен табыс оның ұлттық табысынан артпауы қажет: $p_i \geq x_i$ *(i=1, 2, ...,n).* Егер $p_i > x_i$ *(i=1, 2, ...,n)* деп есептесек, онда мына теңсіздіктер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n > x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n > x_2, \\ ...., \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n > x_n. \end{cases} \qquad (8)$$

(8) жүйесінде барлық теңсіздіктерді қосып, бюджет шамасы x_j болатын қосылғыштарды топтасақ, онда $x_1(a_{11} + a_{21} + ... + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + ... + a_{n2}) + ... + x_n(a_{1n} + a_{2n} + ... + a_{nn}) > x_1 + x_2 + ... x_n$. Жақшалардың ішіндегі қосындылар бірге тең екендігін ескерсек, онда қарама-қайшы теңсіздікке келеміз: $x_1 + x_2 + ... x_n > x_1 + x_2 + ... x_n$.

$p_i > x_i$ *(i=1, 2, ...,n)* теңсіздігі мүмкін емес болғандықтан, $p_i \geq x_i$ шарты мына түрге келеді: $p_i = x_i$ *(i=1, 2, ...,n)*. (Экономикалық тұрғыдан бұл түсінікті, себебі барлық мемлекет бірдей пайда ала алмайды). Әр компоненті сәйкес ел бюджетін сипаттайтын $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ...\ x_n)$ бюджет векторын енгізсек

$$AX = X, \qquad (9)$$

матрицалық теңдеуін аламыз. Мұнда X – $\boldsymbol{x}$ векторының координаталарынан тұратын бағана-матрица, яғни есеп А матрицасының меншікті мәні $\lambda = 1$. болатындай меншікті векторын іздеуге келіп соқты.[2]

1.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Салааралық баланс теңдеуін жаз.
2. Халықаралық сауданың сызықтық моделі дегеніміз не?

1.3 Есептер шығару

1. Есеп беру кезеңіндегі баланс орындалуы туралы мәліметтер (шартты ақша бірлігі) кестеде берілген.

Салалар	Тұтынушылар				Түпкі өнім	Жалпы өнім
		1	2	3	Y	X
өндіріс	1	10	5	15	70	100
	2	15	15	10	80	120
	3	5	10	20	165	200

Егер бірінші саланың соңғы өнімі екі есе, екінші саланікі – 20% артып, ал үшінші саланікі бұрынғы деңгейде қалса¸онда әр саланың жалпы өнімінің қажетті көлемін тап.

2. Есеп беру кезеңіндегі баланс орындалуы туралы мәліметтер (шартты ақша бірлігі) кестеде берілген.

салалар	Тұтынушылар				кі өнім	пы өнім
		1	2	3	Y	X
өндіріс	1	20	15	10	55	100
	2	15	10	15	80	120
	3	20	10	5	165	200

Егер бірінші саланың соңғы өнімі екі есе, екінші саланікі –20% артып , ал үшінші саланікі бұрынғы деңгейде қалса , онда әр саланың жалпы өнімінің қажетті көлемін тап.

3. Егер S_1 , S_2 и S_3 елдерінің саудаларының құрылымдық матрийасы А төмендегі болса, онда баланстық сауда үшін осы елдердің ұлттық табысын тап.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. Егер S_1 , S_2 и S_3 елдерінің саудаларының құрылымдық матрицасы А төмендегі болса, онда баланстық сауда үшін осы елдердің ұлттық табысын тап.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

7-тақырып. Векторлар. Жазықтықтағы түзу.

Дәріс мақсаты: n-өлшемді вектор және оған қолданылатын сызықтық амалдар ұғымын енгізу. Жазықтықта түзудің әртүрлі берілу тәсілдерімен таныстыру.

Дәріс жоспары:

1. Геометриялық векторлар және оларға қолданылатын сызықтық амалдар.

2. Арифметикалық вектор. Векторларға қолданылытын сызықтық амалдар және олардың қасиеттері. n-өлшемді векторлық кеңістік ұғымы.
3. Векторлардың скаляр көбейтіндісі және оның қасиеттері.
4. Векторлардың сызықтық тәуелділігі. Векторлар жүйесінің базисі мен рангі.
5. Кеңістіктің ортогональ және ортонормаль базисі.
6. Екі нүкте арасындағы қашықтық.
7. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу.
8. Сызық теңдеуі.
9. Жазықтықтағы түзу теңдеуі .
10. Түзулердің өзара орналасуы. Екі түзу арасындағы бұрыш. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық.

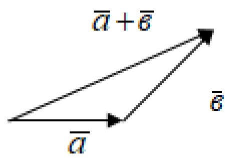
1.1 Негізгі теориялық мәлімет

Векторлар.

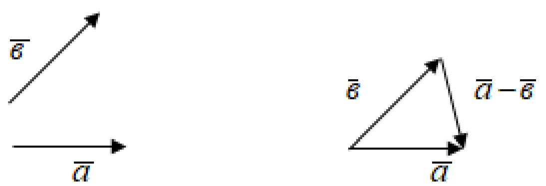
Мектептің геометрия курсынан сіздер екі және үш өлшемді векторлар ұғымымен таныссыздар. Бұл векторлар геометриялық деп аталады, оларды суретте немесе чертежде кескіндеуге болады.

Геометриялық вектор немесе ***вектор*** деп бағытталған кесінді аталады. Вектор үстінде сызық немесе бағытталған сызық қойылған екі әріппен $\overline{AB}$ белгіленеді, онда бірінші әріп вектордың басын, ал екінші – оның ұшын көрсетеді. Векторды латынның бір әріпімен $\overline{a}$ белгілеуге болады. Вектордың ұзындығы немесе ***модулі*** $|\overline{AB}|, |\overline{a}|$ түрінде белгіленеді.

$\overline{a}$ және $\overline{в}$ векторлардың ***қосындысы*** деп бірінші вектордың басынан екінші вектордың ұшына бағытталған үшінші $\overline{a}+\overline{в}$ векторы аталады (1.1-сурет).



1.1-сурет



1.2-сурет

$\overline{a}$ және $\overline{в}$ векторлардың ***айырмасы*** деп $\overline{a}$ векторы мен $\overline{в}$ векторына карама-қарсы вектордың қосындысы болатын үшінші $\overline{a}-\overline{в}$ векторы аталады, яғни $\overline{a}-\overline{в}=\overline{a}+(-\overline{в})$ (1.2-сурет).

$\overline{a}$ ***векторының*** λ ***санына көбейтіндісі*** деп төмендегі шарттар орындалатын және $\lambda\overline{a}$ деп белгіленетін вектор аталады:

1) $|\lambda\overline{a}|=|\lambda||\overline{a}|$;

2) егер $\lambda>0$ болса, онда $\overline{a}$ және $\lambda\overline{a}$ векторлары бағыттас, ал $\lambda<0$ болса, онда қарама-қарсы.

Егер $\bar{a}$ векторы Ох осімен φ бұрышын жасаса, онда вектордың осы оське проекциясы деп вектордың модулі мен φ бұрышы косинусының көбейтіндісі аталады:

$$пр_x\ \bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi \qquad (1)$$

Охуz үш өлшемді кеңістікте $\bar{a}$ векторын мына қосынды түрінде жазуға болады:

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\ \bar{j} + z\ \bar{k} \qquad (2),$$

мұнда $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ - сәйкес осьтердің оң бағытына бағыттас болатын базистік бірлік векторлар, ал x, y, z - $\bar{a}$ векторының координаталар осьтеріне түсірілген проекциялары.

Вектор ***ұзындығы (модулі)*** проекциялар арқылы мына формуламен анықталады:

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (3)$$

$\bar{a}$ векторының координата осьтерімен жасайтын α, β, γ бұрыштарының косинустары мына қатынастар арқылы табылады:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|},\ \cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|},\ \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|} \qquad (4).$$

Олар ***бағыттауыш косинустар*** деп аталады.

Бір түзуде немесе параллель түзулерде орналасқан векторлар **коллинеар** векторлар деп аталады.

Бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда орналасқан векторлар **компланар** векторлар деп аталады..

Енді біз вектор ұғымын n-өлшемді жағдайға жалпылаймыз, яғни арифметикалық векторларды қарастырамыз.

Кез келген реттелген *n* нақты сандардан тұратын жиын *n*-өлшемді вектор деп аталады $\bar{a}$ деп белгіленеді, ал бұл жиынды құрайтын сандар оның координаталары деп аталады: $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$

Экономикада n-өлшемді вектор кеңінен қолданылады, мысалы, тауарлар жиынын $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ және оның сәйкес құндарын $\bar{в} = (в_1, в_2, ..., в_n)$ деп жазуға болады.

Сәйкес координаталары тең және өлшемдері бірдей $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ және $\bar{в} = (в_1, в_2, ..., в_n)$ векторлары ***тең векторлар*** деп аталады.

Барлық координаталары нольге тең болатын векторлар $\bar{0} = (0, 0, ..., 0)$ ***нольдік векторлар*** деп аталады.

Бірдей n өлшемді екі вектордың ***қосындысы*** деп координаталары қосылғыш векторлардың сәйкес координаталарының қосындысы $c_i = a_i + b_i,\ i = 1,2,...,n$ болатын $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ векторы аталады.

$\overline{a}$ векторының λ нақты санына ***көбейтіндісі*** деп $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ векторы аталады, оның b_i координаталары λ санын $\overline{a}$ векторының сәйкес координаталарына көбейткенге тең, яғни $b_i = \lambda a_i,\ i = 1,2,...,n$

Кез келген векторларға қолданылатын сызықтық амалдар мына қасиеттерді қанағаттандырады:

$1^0.\ \overline{a} + \overline{в} = \overline{в} + \overline{a}$

$2^0.\ (\overline{a} + \overline{в}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{в} + \overline{c})$

$3^0.\ \lambda(\overline{a} + \overline{в}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{в}$

$4^0.\ (\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$

$5^0.\ \lambda(\mu\overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}$

$6^0.\ \overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$

$7^0.\ \overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$

$8^0.\ \overline{0} \cdot \overline{a} = \overline{0}$

Осы қасиеттерді қанағаттандыратын барлық n өлшемді векторлар жиынтығы ***n-өлшемді векторлар кеңістігі*** R^n деп аталады.

$\overline{a}$ және $\overline{b}$ екі геометриялық векторлардың ұзындықтары мен олардың арасындағы бұрыштың косинусының көбейтіндісі вектордың ***скалярлық көбейтіндісі*** $\overline{a} \cdot \overline{b}$ деп аталады:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi \quad (5)$$

Егер $\overline{a}$ және $\overline{b}$ перпендикуляр болса, онда $\varphi = 90^0$, $\cos 90^0 = 0$. Сонда скаляр көбейтінді $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$. Скаляр көбейтіндісі нольге тең векторлар ***ортогональ*** векторлар деп аталады. $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ теңдігі екі вектордың ортогональдық (перпендикулярлық) белгісін білдіреді.

Екі ***арифметикалық*** векторлардың ***скалярлық көбейтіндісі*** деп осы векторлардың сәйкес координаталарының көбейтінділерінің қосындысына тең сан аталады:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \quad (6)$$

Векторлардың скаляр көбейтіндісінің негізгі қасиеттері:

1) $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$;

2) $(\lambda\overline{a})\overline{b} = \lambda(\overline{a}\overline{b})$, мұнда λ - нақты сан;

3) $\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\,\overline{c}$;

4) $\overline{a}\,\overline{a} > 0$, егер $\overline{a} \neq \overline{0}$, және $\overline{a}\,\overline{a} = 0$, егер $\overline{a} = \overline{0}$.

Егер $\overline{a} = \overline{b}$ болса, онда $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$. Сонда (5) формула бойынша: $\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$ және (6) формула бойынша: $a \cdot a = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$. Яғни $|a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$. Бұдан вектор модулі мына формуламен анықталады:

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \quad (7)$$

(5) формуладан екі вектор арасындағы бұрыш анықталады:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} \quad (8)$$

Әр түрлі есептерді шешкенде бір емес бірнеше бірдей өлшемді векторлар жиынтығын қарастырамыз. Ондай жиынтық ***векторлар жүйесі*** деп аталады және реттеліп номірленген бір әріппен белгілінеді:

$$\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_k \quad (9)$$

Векторлар жүйесінің ***сызықтық комбинациясы*** деп

$$\bar{b} = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_k\bar{a}_k \quad (10)$$

түріндегі вектор аталады, мұнда $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_k$ - кез келген нақты сандар.

Егер $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_k\bar{a}_k = \bar{0}$ теңдігі орындалатындай бәрі бірдей нольге тең емес $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_k$ сандары табылса, онда $\bar{a}_1, \bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_k$ векторлар жүйесі ***сызықтық тәуелді*** деп аталады.

Егер бұл теңдік тек қана $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$ болғанда орындалса, онда бұл векторлар жүйесі ***сызықтық тәуелсіз*** деп аталады.[2]

Сызықтық тәуелді векторлар жүйесінің қасиеттері:

1. Бір вектордан тұратын жүйе сызықтық тәуелді;
2. Нольдік векторы бар жүйе әрқашан сызықтық тәуелді;
3. Бірден артық вектордан тұратын жүйе сонда тек қана сонда сызықтық тәуелді болады, егер олардың ішінде ең болмағанда біреуі қалғандар арқылы сызықтық өрнектелсе.

Теорема. Егер m>n болса, онда R^n кеңістігінде m вектордан тұратын кез келген жүйе сызықтық тәуелді

Векторлар жүйесінің ең көп сызықтық тәуелсіз векторлары оның ***базисі*** деп аталады. Базистегі векторлар саны векторлар жүйесінің ***рангі*** деп аталады.

n векторлар жүйесі R^n кеңістігінің базисі болады, егер:

1) осы жүйенің векторлары сызықтық тәуелсіз болса;
2) R^n кеңістігіндегі кез келген вектор осы жүйенің басқа векторлары арқылы сызықтық өрнектелсе.

Базистің әр векторы қалған векторларына ортогональ болса, онда R^n кеңістігінің базисі ***ортогональ*** базис деп аталады.

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n; \qquad \bar{e}_i\bar{e}_j = 0,\ i\neq j, \qquad i,j = 1,2,\ldots,n$$

Егер R^n кеңістігінің $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n$ векторлары өзара ортогональ және олардың модульдері бірге тең болса, онда ол векторлар ***ортонормаль базис*** құрайды, яғни $i\neq j$ болғанда $\bar{e}_i\bar{e}_j = 0$ және $|\bar{e}_i| = 1$, $i = 1,2,\ldots,n$

Мысалы, $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ орттары үш өлшемді кеңістікте ортонормаль базис құрайды.

Жазықтықтағы түзу

OXY жазықтығында $A(x_1;y_1)$ және $B(x_2; y_2)$ ***нүктелерінің ара қашықтығы*** мына формула бойынша табылады:

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

AB кесіндісін $\frac{AM}{MB} = \lambda$ қатынасында бөлетін *M(x;y),* нүктесінің координаталары мына формулалармен анықталады:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \quad (2)$$

Дербес жағдайы: егер $\lambda = 1$, яғни *AM=MB* болса , онда:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (3)$$

Бұл жағдайда *M(x;y)* нүктесі *AB* кесіндісінің ортасы болады.

Сызықтың әр нүктесінің *x* және *y* координаталары қанағаттандыратын және осы сызықта жатпайтын кез келген басқа нүктенің координаталары қанағаттандырмайтын екі белгісізі бар $F(x;y) = 0$ теңдеуі Оху жазықтығында ***сызық теңдеуі*** деп, аталады.

Сызық теңдеуіндегі *x* және *y* айнымалылары сызық нүктелерінің ағымдағы координаталары деп аталады.

Ох осінің оң бағытынан (сағат тіліне қарама-қарсы) берілген түзуге дейінгі ең кіші бұрыш түзудің ***көлбеу бұрышы*** α ($0 \le \alpha < \pi$) деп аталады

Түзудің көлбеу бұрышының тангенсі бұрыштық коэффициенті *k* деп аталады, яғни tg$\alpha = k$.[2]

Ең қарапайым сызық – түзу. Оның түрлі берілу тәсілдерін қарастырайық:

1) *Түзудің бұрыштық коэффициентімен берілген теңдеуі:*

$$y = k \cdot x + b \qquad (4)$$

2) *Түзудің белгілі бағытта берілген нүкте арқылы өтетін теңдеуі:*

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (5)$$

3) *Екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуі:*

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (6)(6)$$

4) *Түзудің кесіндідегі у теңдеуі:*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (7)$$

мұнда a және b – түзудің сәйкес Ох және Оу координата осьтерінен қиятын кесінділері.

5) *Түзудің жалпы теңдеуі:*

$Ax+By+C=0$, мұнда A,B,C – кез келген сандар.(8)

Түзу теңдеуінің дербес жағдайлары:

ә) C=0 болса, онда у $=-\frac{A}{B}x$ – түзу координат басынан өтеді;

а) B=0 болса, онда х $=-\frac{C}{A}=a$ – түзу Оу осіне параллель;

б) A=0 болса, онда у $=-\frac{C}{B}=b$ – түзу Ох осіне параллель;

в) $B=C=0$ болса, онда х=0 – Оу осі;

г) $A=C=0$ болса, онда y=0 – Оx осі.

Егер екі түзудің k_1 ,k_2 бұрыштық коэффициенттері белгілі болса, онда осы түзулердің арасындағы φ бұрышы мына формуламен анықталады:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \qquad (9)$$

Түзулердің ***параллельдік белгісі:***

$k_1=k_2$ немесе $a_1/a_2=в_1/в_2$ (10)

Түзулердің ***перпендикулярлық белгісі:***

$k_2=-1/k_1$ немесе $a_1a_2+в_1в_2=0$ (11)

$M_0(x_0;y_0)$ нүктесінен $ax+вy+c=0$ түзуіне дейінгі ара қашықтық:

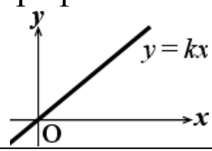
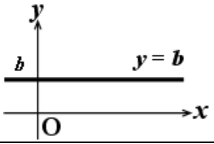
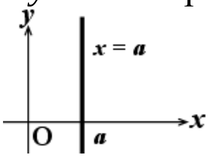
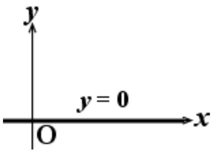
$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (12)$$

Түзулердің әртүрлі теңдеулері

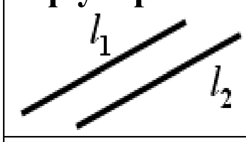
Атауы	Түзу теңдеуінің түрі
Түзудің жалпы теңдеуі	$\mathbf{Ax+By+C=0}$
Бұрыштық коэффициенті бар түзудің теңдеуі	$\boldsymbol{y=kx+в}$
Берілген бағыттағы нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі	$\boldsymbol{y-y_0=k(x-x_0)}$
Берілген екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуі	$\boldsymbol{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$.

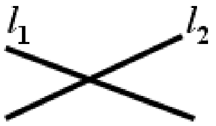
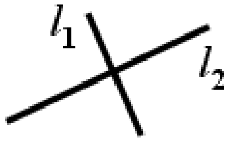
Түзудің кесіндідегі у теңдеуі	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (a \neq 0,\ b \neq 0).$

Сызықтық теңдеудің дербес жағдайлары

Түзудің түрі	Түзудің теңдеуінің түрі	
	$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$	$\boldsymbol{y = kx + в}$
Тікелей пропорционалдылық графигі 	$\boldsymbol{Ax + By = 0}$ $y=-\frac{A}{B}x$ $\boldsymbol{(A \neq 0, B \neq 0)}$	$\boldsymbol{y = kx}$ $\boldsymbol{(k \neq 0)}$
Ох осіне параллель түзу 	$\boldsymbol{By + C = 0}$ $y=-\frac{C}{B}$ $\boldsymbol{(B \neq 0, C \neq 0)}$	$\boldsymbol{y = b}$ $\boldsymbol{(b \neq 0)}$
Оу осіне параллель түзу 	$\boldsymbol{Ax + C = 0}$ $x=-\frac{C}{A}$ $\boldsymbol{(A \neq 0, C \neq 0)}$	$\boldsymbol{x = a}$ $\boldsymbol{(a \neq 0)}$
Ох осінің теңдеуі 	$\boldsymbol{By + C = 0}$ $\boldsymbol{y = 0}$ $\boldsymbol{(B \neq 0)}$	$\boldsymbol{y = 0}$

Түзулердің өзара орналасу шарттары

Түзулердің өзара орналасуы	**Әртүрлі типтегі түзу теңдеулері үшін сызықтардың орналасу шарттары**	
	$\boldsymbol{l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0}$ $\boldsymbol{l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0}$	$\boldsymbol{l_1: y = k_1x + в_1}$ $\boldsymbol{l_2: y = k_2x + в_2}$
Түзулер параллель 	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$	$\boldsymbol{k_1 = k_2}$ $\boldsymbol{b_1 \neq b_2}$
Түзулер сәйкес келеді 	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$	$\boldsymbol{k_1 = k_2}$ $\boldsymbol{b_1 = b_2}$

Түзулер қиылысады 	$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$	$k_1 \neq k_2$
Түзулер перпендикуляр 	$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$	$k_1 \cdot k_2 = -1$

1.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1.Геометриялық вектор анықтамасын бер.
2.Қосу, азайту және векторды санға көбейту ережелерін тұжырымда (үшбұрыш, параллелограмм ережесі).
3.Арифметикалық вектор мен R^n кеңістігінің анықтамасын бер.
4. Векторларға қолданылатын сызықтық амалдар және олардың қасиеттері.
5.Қандай векторлар компланар, коллинеар, тең, қарама-қарсы, бағыттас, нольдік деп аталады?
6.Вектордың оське проекциясы неге тең?
7.Векторлардың скаляр көбейтіндісі деп не аталады және оның қасиеттері?
8.Ортогональ деп қандай векторлар аталады?
9.Вектордың модулі деп не аталады және қандай формуламен ол анықталады?
10.Қандай вектор бірлік вектор деп аталады?
11.Векторлар арасындағы бұрыш неге тең?
12.Векторлардың сызықтық комбинациясы деп не аталады?
13. Қандай векторлар сызықтық тәуелсіз, тәуелді деп аталады?
14. Векторлық кеңістіктің базисі және рангі дегеніміз не?
15. Векторлық кеңістіктің ортогональ базисі деп не аталады?
16. Векторлық кеңістіктің ортонормаль базисі деп не аталады?
17.Екі нүктенің ара қашықтығы. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық.
18.Түзудің жалпы теңдеуі.
19.Түзудің бұрыштық коэффициенті дегеніміз не?
20.Түзудің бұрыштық коэффициенті арқылы берілген теңдеу.
21.Түзудің белгілі бағытта және берілген нүкте арқылы өтетін теңдеуі.
22.Түзудің кесіндідегі теңдеуі.
23.Екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуі.
24.Екі түзу арасындағы бұрыш.
25.Түзулердің параллельдік белгісі.
26.Түзулердің перпендикулярлық белгісі.

1.3 Есептер шығару

1. *а* **және** *в* **векторларының скалярлық кобейтіндісн тап.**

1.1 $a = (1; 1; 4)$ және $в = (3; 4;–2)$
1.2 $a = (3;–2; 3)$ және $в = (1; 2; 1)$
1.3 $a = (–5; 1; 3)$ және $в = (2; 2; 2)$
1.4 $a = (1; 2;–5)$ және $в = (2; 4; 3)$

2. Веторларың скалярлық кобейтіндісі с – санына тең болатын х-тің мәнін тап:
2.1 $a = (2; x; 4)$ және $в = (1; 2; x)$, с = 8;
2.2 $a = (–3; –x; 1)$ және $в = (–2; 2; x)$, с = 1;
2.3 $a = (x; 1; 2)$ және $в = (8; 3; –2)$, с = 15;
2.4 $a = (-1; 2; –3)$ және $в = (x; x; –1)$, с = 2;
2.5 $a = (2x; 3; 5)$ және $в = (1; 2; –x)$ ортогонал болатын;
2.6 $a = (1; x; 3)$ және $в = (4; 1; x)$ ортогонал болатын

3.1 Берілген $a(1;0;-1)$ **және ,** $b(2;-1;0)$ **табу керек** $(2\vec{a}+\vec{b})\vec{a}$
3.2 Берілген $a(2;0;-1)$ **және** $b(-2;4;2)$ **, табу керек** $(\vec{a}+2\vec{b})\vec{a}$

4. Берілген векторлардың ұзындығы және олардың арасындағы бұрыш бойынша олардың скалярлық кобейтіндісін тап:
4.1 4 және $3\sqrt{2}$, φ = π /4
4.2 2 және 3, φ = π /3
4.3 5 және 6, φ = 60^0
4.4 0,5 және $2\sqrt{3}$, φ = π /6
4.5 $2\sqrt{3}$ және 1, φ = 30^0
4.6 4 және 5, = π /3

5. Скалярлық кобейтіндісін табу керек егер:
5.1 $(3\vec{a}-7b)b$, Еегер a және b – бағыттас бірлік векторлар болса
5.2 $(3\vec{a}+2\vec{b})a$, егер a және b – бағыттас бірлік векторлар болса
5.3 $(2\vec{a}-7b)b$,егер a және b – бағыттас бірлік векторлар болса
5.4 $(2\vec{a}+5b)b$, егер a және b – бағыттас бірлік векторлар болса

6. a **векторының модулін табу керек егер:**
6.1 $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, скалярлық кобейтіндісі $a \bullet b = 2$, φ - a мен b векторлар арасындағы бұрыш тең 45^0
6.2 $|\vec{b}|$ =8, скалярлық кобейтіндісі $a \bullet b = 12$ φ - a мен b векторлар арасындағы бұрыш тең φ 60^0
6.3 a және b векторлары бағыттас, $|\vec{b}|$ =6 және скалярық кобейтіндісітең $a \bullet b = 18$

6.4 a және b қарама-қарсы бағытталған, $|\vec{b}|=7$ және скалярлық көбейтіндісіі тең $a \bullet b = -28$

7. a **векторын** p**,** ***q*** **және** ***r*** **векторлары бойынша жікте:**

7.1 *p =(2, 0, 0), q=(0,1.0) r=(0,1,1) a =(4,0,1)*

7.2 *p =(1, 1, 0), q = (2,0,0) r=(0,0,1) a = (-1,3,-1*

7.3 *p =(0, -1, 2), q = (1,0,-1) r = (-1.2,4) a = (-2.0,9)*

8. A, B және C нүктелері берілген. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ **ортылары бойынша** $\vec{a}$ **векторын жіктеу. Бағытталған косинустарды және** $\vec{a}$ **вектор ортының ұзындығын табу.**

8.1. $A(1;2;-1),\ B(1;3;4),\ C(0;1;5),\ \vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}.$

8.2. $A(1;2;-1),\ B(1;3;4),\ C(0;1;5),\ \vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}.$

8.3. $\mathrm{A}(1;2;-1),\ \mathrm{B}(1;3;4),\ \mathrm{C}(0;1;5),\ \vec{\mathrm{a}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$

8.4. $\mathrm{A}(1;2;-1),\ \mathrm{B}(1;3;4),\ \mathrm{C}(0;1;5),\ \vec{\mathrm{a}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$

8.5. $\mathrm{A}(1;2;-1),\ \mathrm{B}(1;3;4),\ \mathrm{C}(0;1;5),\ \vec{\mathrm{a}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$

8.6. $\mathrm{A}(1;2;-1),\ \mathrm{B}(1;3;4),\ \mathrm{C}(0;1;5),\ \vec{\mathrm{a}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}}.$

8.7. $\mathrm{A}(1;2;-1),\ \mathrm{B}(1;3;4),\ \mathrm{C}(0;1;5),\ \vec{\mathrm{a}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}.$

8.8. $\mathrm{A}(1;2;-1),\ \mathrm{B}(1;3;4),\ \mathrm{C}(0;1;5),\ \vec{\mathrm{a}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$

9 **Бұрыштық коэффициенті *k* болатын, $M_0(x_0;y_0)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазып, және оны түзудің жалпы теңдеуі, бұрыштық коэффициенті бар түзудің теңдеуі, кесіндідегі түзудің теңдеуі түрінде көрсетіңіз. Түзуге нормаль векторын жаз**

а) $M_0(1;3)$, k=2 б) $M_0(2; 5)$, k=3 в) $M_0(2;1)$, k=5

10 **Екі нүкте, $M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$, арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазып, оны $M_1(x_1, y_1)$ нүктесі арқылы берілген бағытта өтетін түзудің теңдеуі түрінде, түзудің жалпы теңдеуі түрінде, бұрыштық коэффициенті бар түзудің теңдеуі, кесіндідегі түзудің теңдеуі түрінде көрсетіңіз. Түзуге нормаль векторын жаз**

а) $M_1(1; 4)$ **және** $M_2(3; 1)$ б) $M_1(1; 2)$ **және** $M_2(3; 8)$ в) $M_1(-1; 3)$ **және** $M_2(3; 4)$

11 **$M_0(x_0;y_0)$ нүктесі арқылы өтетін бұрыштық коэффициенті *k* болатын түзудің теңдеуін жазып, $x= x_1$ кезіндегі түзудің ординаталық мәнін табыңыз**

а) $M_0(2;2)$, k=2, x=3 б) $M_0(0;-2)$, k=2, x=4

в) $M_0(1;2)$, k=-1, x=2 г) $M_0(3;0)$, k= -1, x=6

12 **$M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазып, $x = x_0$ болған кезіндегі түзудің ординаталық мәнін табыңыз**

а) $M_1(0; 4)$ және $M_2(6; 1)$, $x=2$ б) $M_1(1; 5)$ және $M_2(2; 3)$, $x=0$

в) $M_1(2; 3)$ және $M_2(8; 0)$, $x=4$ г) $M_1(-2; 5)$ және $M_2(3; 0)$, $x=2$

13 **Түзулердің қиылсу нүктесін табыңыз**

а) $2x - y = 0$ және $3x - y - 1 = 0$ б) $x - 3y - 1 = 0$ және $x - 2y - 3 = 0$

в) $3x + y - 3 = 0$ және $4x + y - 3 = 0$ г) $x + 4y - 2 = 0$ және $x + 5y - 2 = 0$

д) $x - 3y = 0$ және $2x - 5y - 1 = 0$

14 **Түзулердің қиылысу нүктесінен координаттардың бас нүктесіне дейінгі қашықтықты табыңыз**

а) $2x - y - 2 = 0$ және $x - y + 1 = 0$

б) $x - y - 2 = 0$ және $x - 2y + 4 = 0$

в) $x - y + 2 = 0$ және $2x + y + 4 = 0$

г) $x + 2y - 4 = 0$ және $x + y + 2 = 0$

д) $x + y + 3 = 0$ және $2x - y - 3 = 0$

15 **Түзудің бұрыштық коэффициентін табыңыз**

а) $x + 2y + 7 = 0$ б) $5x - 3y + 2 = 0$

в) $8x + 2y + 1 = 0$ г) $5x - 10y + 2 = 0$

д) $4x + y + 3 = 0$

16 **а-ның қандай мәндерінде түзулер параллель болады?**

а) $9x + ay + 1 = 0$ және $a^2x - 3y - 2 = 0$

б) $2x + ay - 1 = 0$ және $a^2x + 4y + 5 = 0$

в) $ax + 3y - 4 = 0$ және $9x + a^2y + 7 = 0$

г) $a^2x + 4y + 11 = 0$ және $2x - ay - 3 = 0$

д) $2x + 6y - 3 = 0$ және $ax - 15y + 1 = 0$

17 **$y = kx + в$ түзуіне параллель $M_0(x_0; y_0)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазып, $x = x_1$ болатын түзудің ординаталық мәнін табыңыз**

а) $M_0(3; 4)$, $y = 2x + 3$, $x = 4$

б) $M_0(0; 4)$, $y = 0{,}5x + 9$, $x = 4$

в) $M_0(0; 3)$, $y = -x - 7$, $x = 1$

г) $M_0(2; 2)$, $4x - 2y + 7 = 0$, $x = 5$

д) $M_0(2; 3)$, $y = -0{,}5x - 3$, $x = 6$

е) $M_0(2; 1)$, $3x + 3y + 5 = 0$, $x = 5$

18 **а-ның қандай мәндерінде түзулер перпендикуляр болады?**

а) $y = 2x + 7$ және $y = ax - 7$ б) $y = ax + 4$ және $y = -0.5x - 9$

в) $10x + ay + 4 = 0$ және $x - 5y - 6 = 0$ г) $6x - y + 5 = 0$ және $2x + 3ay - 1 = 0$

д) $ax - 10y - 7 = 0$ және $5x + 2y - 1 = 0$

19.1 $-2x + y + 3 = 0$ **түзуіне параллель түзуді көрсетіңіз**

А) $y = -2x - 3$ В) $2x + y + 3 = 0$ С) $x + 2y - 1 = 0$ D) $y = 2x$ E) $y = 3$

19.2 $6x + 3y + 2 = 0$ **түзуіне параллель түзуді көрсетіңіз**

А) $y = 2x + 1$ В) $y = 6x + 1$ С) $4x + y - 1 = 0$ D) $y = 2x$ E) $2x + y - 7 = 0$

19.3 $y = 2x + 1$ **түзуіне параллель түзулерді көрсетіңіз (бірнеше дұрыс жауап)**

А) $y = -2x - 1$ В) $-2x + y + 3 = 0$

С) $y + 2x - 1 = 0$ D) $y = 2x + 5$

E) $4x - 2y + 5 = 0$

19.4 $y = -0{,}5x + 3$ **түзуіне параллель түзулерді көрсетіңіз (бірнеше дұрыс жауап)**

А) $x - 2y + 7 = 0$ В) $3x + 6y - 1 = 0$ С) $2x + y - 3 = 0$

D) $x + 2y = 0$ E) $x - 5y - 3 = 0$

19.5 $y = 2x + 5$ **түзуіне параллель түзулерді көрсетіңіз (бірнеше дұрыс жауап)**

А) $4x - 2y + 5 = 0$ В) $-6x + 3y + 1 = 0$ С) $2x + y + 5 = 0$

D) $x + 2y - 1 = 0$ E) $2x - y - 5 = 0$

20.1 ***y* = -2*x* +5 түзуіне перпендикуляр түзуді көрсетіңіз**

А) $y = 5x + 1$ В) $y = 0{,}5x + 3$ С) $y = -0{,}2x + 1$ D) $y = -0{,}4x + 5$ E) $y = x - 0{,}4$

20.2 ***y* = 2.5*x* - 1 түзуіне перпендикуляр түзуді көрсетіңіз**

А) $y = 2x + 1$ В) $y = 0{,}5x + 3$ С) $y = -2x + 5$ D) $y = -0{,}5x + 1$ E) $y = -0{,}4x + 1$

20.3 **2*x*+3*y*+4 = 0 түзуіне перпендикуляр түзуді көрсетіңіз**

А) $2x + 3y - 4 = 0$ В) $3x + 2y + 4 = 0$ С) $3x - 2y + 4 = 0$ D) $2x - 3y - 4 = 0$

E) $-2x + 3y + 4 = 0$

20.4 ***x* - 2*y* - 3 = 0 түзуіне перпендикуляр түзуді көрсетіңіз**

А) $x - 2y + 3 = 0$ В) $-x + 2y + 3 = 0$ С) $2x - y + 3 = 0$ D) $2x + y + 3 = 0$

E) $3x - 2y + 1 = 0$

20.5 **3*x*+4*y*+1 = 0 түзуіне перпендикуляр түзуді көрсетіңіз** А) $4x + 3y + 5 = 0$

В) $4x - 3y + 2 = 0$ С) $3x + 4y + 7 = 0$ D) $3x + 4y - 1 = 0$ E) $3x - 4y - 1 = 0$

8-тақырып Функционалдық тәуелділік

Дәріс мақсаты: Студенттерді функция ұғымымен, оның берілу тәсілдерімен, негізгі сипаттамаларымен және кейбір экономикалық пәндерде қолданылатын арнайы функциялармен таныстыру.

Дәріс жоспары:

1. Сан жиындары.
2. Бір айнымалы функция және оның графигі.
3. Функцияның берілу тәсілдері.
4. Функцияның негізгі қасиеттері.
5. Кері, күрделі және айқын емес функциялар.
6. Негізгі элементар функциялар.
7. Сұраныс және ұсыныс функциялары. Нарықтық локальдық тепе-теңдік. Тепе-теңдік баға және тепе-теңдік сату көлемі.

1.1 Негізгі теориялық мәлімет

Ортақ белгісі бойынша біріктірілген объектілер жиынтығы ***жиын*** деп аталады. Жиын құралатын объектілер оның элементтері деп аталады. Жиын латынның бас әріптерімен *A,B,C…X,У…,* ал оның элементтері кіші әріптерімен *а, в, с…х, у…* белгіленеді. Егер жиында элемент болмаса, онда ол ***бос жиын*** деп аталады және $\varnothing$ деп белгіленеді. Элементтері сан болатын жиындар ***сан жиындары*** деп аталады. Мысалы: $N = \{1,2,3,...,n\}$ - натурал сандар жиыны, $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,..., \pm n\}$ - бүтін сан жиыны. R – рационал және иррационал сандардан тұратын нақты сандар жиыны. Рационал сандар - $\frac{m}{n}$ түріндегі сандар.Иррационал сандар - шексіз периодсыз ондық бөлшектер. ($\sqrt{2}$ =1,4142356 …,π = 3,1415926 …, e =2,718281…).

Функция ұғымы екі жиын элементтері арасында тәуелділік тағайындаумен байланысты. X және $У$ жиындары берілсін.

Анықтама. Егер X жиынының әрбір x ($x\in X$) элементіне $У$ жиынының нақты бір y ($y\in У$) элементі сәйкес қойылса, онда X жиынында $y = f(x)$ ***функция*** деп аталады.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясы анықталатын x тәуелсіз айнымалысының мәндерінің жиыны осы функцияның ***анықталу облысы*** деп аталады *D(f)=X* деп белгіленеді.

Анықтама. Тәуелді y айнымалының мәндерінің жиыны функцияның ***мәндер облысы*** деп аталады *E(f)=Y* деп белгіленеді.

Анықтама. Координаталары $(x, f(x))$, $x\in X$ болатын нүктелер жиыны $y = f(x)$ функциясының ***графигі*** деп аталады.

$y = f(x)$ функциясы берілуі үшін белгілі x бойынша y-тің мәні табылатын ережені көрсету қажет.

Функцияның негізгі берілу тәсілдері:

- аналитикалық;
- кестелік;
- графиктік;
- сөздік.

Функция бір немесе бірнеше формулалармен немесе теңдеумен берілуі ***аналитикалық тәсіл*** деп аталады.

Функция графигін кескіндеу, яғни аргумент мәні x абциссасы, ал оған сәйкес $y = f(x)$ функциясының мәні y ординатасы болатын жазықтықтағы (x;y) нүктелер жиынын салу ***графиктік тәсіл*** деп аталады.

Функция x аргументінің мәндері және оған сәйкес $f(x)$ функциясының мәндері жазылған кесте арқылы берілуі ***кестелік тәсіл*** деп аталады.

Функцияның құрылу ережесін сипаттау арқылы берілуі ***сөздік тәсіл*** деп аталады.

Функцияның негізгі қасиеттері:

Анықтама. Анықталу облысындағы кез келген x үшін $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) теңдігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясы ***жұп (тақ)*** деп аталады.

Анықтама. Егер X аралығында аргументтің үлкен мәніне функцияның үлкен (кіші) мәні сәйкес келсе, онда осы аралықта функция ***өспелі (кемімелі)*** деп аталады.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \ \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

Өспелі және кемімелі функциялар ***монотонды (бірсарынды)*** функциялар деп аталады. Функция монотонды болатын интервалдар ***монотондылық интервалы*** деп аталады.

Анықтама. Егер кез келген $x \in X$ үшін $|f(x)| \leq M$ теңсіздігі орындалатындай $M > 0$ саны табылса, онда $y = f(x)$ функциясы X аралығында ***шектелген*** функция деп аталады.

Анықтама. Егер функцияның анықталу облысындағы кез келген x үшін $f(x+T) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясы периоды Т $\neq 0$ болатын ***периодты*** функция деп аталады.

$y = f(x)$ анықталу облысы X , мәндер облысы $У$, тәуелсіз айнымалысы x болатын функция болсын. Әрбір $y \in У$ үшін $f(x)=y$ теңдігі орындалатындай жалғыз $x \in X$ мәні сәйкес қойылсын. Сонда алынған анықталу облысы $У$, мәндер облысы X болатын $x = \varphi(y)$ функциясы ***кері функция*** деп аталады.

$y = f(x)$, $x = \varphi(y)$ функциялары ***өзара кері*** функциялар деп аталады. Өзара кері функциялардың графиктері бірінші және үшінші координаталық бұрыштардың биссектрисасына қарағанда симметриялы болады.

$y = f(u)$ анықталу облысы U, мәндер облысы $У$, тәуелсіз айнымалысы u, болатын функция болсын, ал u айнымалысының өзі анықталу облысы X, мәндер облысы U, тәуелсіз айнымалысы x болатын $u = \varphi(x)$ функция болсын. . Сонда X жиынында анықталатын $y = f(\varphi(x))$ функциясы ***күрделі функция*** деп аталады.

Егер аргументі *x* болатын *y* функциясы тәуелді айнымалыға қарағанда шешілмеген түрде $F(x;y)=0$ теңдеуімен берілсе, онда ол ***айқын емес функция*** деп аталады.[3]

Негізгі элементар функциялар.

а) дәрежелік: $y=x^{\alpha}$, $\alpha \in R$;

б) көрсеткіштік: $y=a^{x}$, $a>0$, $a\neq 1$; $D(f)=(-\infty;+\infty)$, $E(f)=(0;+\infty)$;

в) логарифмдік: $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$; $D(f)=(0;+\infty)$, $E(f)=(-\infty;+\infty)$;

г) тригонометриялық: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$;

д) кері тригонометриялық: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$.

Экономикалық функциялардың мысалдарын келтірелік. *x* бірлік кез келген өнім шығарғанда *жалпы (қосынды) шығын C(x)* екі қосылғыштан – тұрақты және айнымалы шығыннан тұрады:

$$C(x)=F+V.$$

Тұрақты шығындар F - бұл өндірілген өнім бірлігі санынан тәуелсіз шығындар. Оған амортизация, аренда, заем проценті жатады.

Айнымалы шығындар V - бұл өндірілген өнім бірлігі санынан тәуелді шығындар. Оған шикізат құны, жұмыс күші т.с.с. кіреді.

Қарапайым жағдайда айнымалы шығын өндірілген өнім мөлшеріне *x* тура пропорционал. Пропорционалдық коэффициенті *a* - бір өнім бірлігін шығаруға кеткен айнымалы шығын.

в деп тұрақты шығынды белгілесек, онда *шығынның сызықтық моделі* деп аталатын теңдеу шығады: $C(x)=в+ax$.

Кәсіпорынның *x* бірлік өнім сатқаннан алған ***жалпы табысы*** немесе ***түсімі*** *R(x),* мына $R(x)=P\cdot x$ формуласымен анықталады, мұнда *P* – тауар бірлігінің бағасы.

Егер *x* бірлік өнім өндіріліп және сатылса, онда одан түскен ***пайда*** *П(x)* мына формуламен анықталады: $П(x)=R(x)-C(x)$

Көрсеткіштік және логарифмдік функциялар қаржылық есептеулерде қолданылады. Банктік операциялардың көбі ақшаны «өсіруге» немесе «процентке» береді. Өскен (соңғы) капитал S_n мына формулалармен есептеледі:

$$S_n=S_0(1+ni) \quad (1)$$

$$\text{немесе } S_n=S_0(1+i)^n, \quad (2)$$

мұнда S_0– бастапқы капитал;

n – процент есептеу саны;

i – проценттік ставка.

(1) формула бойынша ***жай*** процент, ал (2) формула бойынша ***күрделі*** процент есептейді. (1) формулада сызықтық тәуелділік, (2) формулада көрсеткіштік қолданылады. [2]

Сатып алушылардың нарықта сатып алатын тауарларының мөлшері осы тауар бағасынан тәуелді. Баға P және сатып алынған тауарлар мөлшері Q арасындағы қатынас ***сұраныс функциясы*** деп аталады, $Q = D(P)$, мұнда Q сұраныс көлемі деп аталады. Сұраныс функциясының графигі ***сұраныс қисығы*** деп аталады және D деп белгіленеді.

Тауар бағасы артқан болған сайын оны сатып алушылар саны кемиді $P_1 < P_2 \Rightarrow D(P_1) > D(P_2)$, сондықтан сұраныс функциясы кемімелі функция.

Өндірушілердің сатуға шығарған тауарлар мөлшері осы тауар бағасынан тәуелді. Баға P және өндірушілер сатуға қойған тауарларының мөлшері Q арасындағы қатынас ***ұсыныс функциясы*** деп аталады, $Q = S(P)$, мұнда Q ұсыныс көлемі деп аталады. Ұсыныс функциясының графигі ***ұсыныс қисығы*** деп аталады және S деп белгіленеді.

Тауар бағасы артқан болған сайын сатушылар оның көп мөлшерін ұсынады $P_1 < P_2 \Rightarrow S(P_1) < S(P_2)$, сондықтан ұсыныс функциясы өспелі функция.

Микроэкономикада сұраныс және ұсыныс қисықтарының қиылысу нүктесі $D(P_0) = S(P_0)$ маңызды нүкте болады. Бұл нүкте $(P_0; Q_0)$ ***локальды нарықтық тепе-теңдік нүктесі*** деп аталады. Сәйкес P_0 – ***тепе-теңдік баға***, ал Q_0 – ***тепе-теңдік сату көлемі***. [2]

Қарапайым жағдайларда бұл функциялар сызықтық болады. Бұл жағдайда сұраныстың (ұсыныстың) P_0 және P_1 бағаларындағы мәндерін білсек, онда сызықтық интерполяция формуласын қолданып, сұраныс (ұсыныс) функцияларын құруға болады:

$$f(x) = y_0 + \frac{h_y}{h_x}(x - x_0), \text{ где } h_y = y_1 - y_0, \; h_x = x_1 - x_0$$

1.2 Тексеруге арналған сұрақтар:

1. Функция ұғымының анықтамасын тұжырымда.
2. Функцияның анықталу облысы деп не аталады?
3. Функцияның графигі деп не аталады?
4. Функцияның ең көп тараған берілу тәсілдері қандай?
5. Қандай функция жұп (тақ) деп аталады?
6. Қандай функция өспелі (кемімелі) деп аталады?
7. Қандай функция шектеулі деп аталады?
8. Қандай функция периодты деп аталады?
9. Қандай функция кері деп аталады?
10. Қандай функциялар өзара-кері деп аталады? Декарт координаталар жүйесінде берілген функция графигі бойынша оның кері функциясы графигін қалай салуға болады?
11. Қандай функция күрделі деп аталады?
12. Қандай функция айқын (айқын емес) деп аталады?

13.Негізгі элементар функцияларды ата. Олардың негізгі қасиеттері қандай? Мына функциялардың графигін сыз: сызықтық, квадраттық, көрсеткіштік, логарифмдік.
14.Сұраныс функциясы және ұсыныс функциясы деп не аталады?
15.Тепе-теңдік баға және тепе-теңдік сату көлемі деп не аталады?

Нұсқау:
Негізгі элементар функциялардың қасиеттері мен графиктерін өздерің оқыңдар.

1.3 Есептер шығару

1 Функциялардың анықталу облысын табыңыз

a) $y=\sqrt{1-x}+\dfrac{3x-2}{x}$

b) $y=(x^2-x+3)\cdot\ln(2-2x)$

c) $y=\sqrt{0.5x-6}+\ln(4-0.25x)$

d) $y=\sqrt{0,25x-1}$

e) $y=\sqrt{15-x}+\ln(x-14)$

f) $y=\dfrac{\sin x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x-2}$

2 Функциялардың анықталу облысын табыңыз

a) $y = \ln(x^2 + 9x + 20)$

b) $y = \ln(-3 + 4x - x^2)$

c) $y=\dfrac{1}{\ln(x+4)}$

d) $y=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$

e) $y=\sqrt{x^2+2x}$

f) $y = \ln(x^2 + 7x + 6)$

3 Функциялардың анықталу облысын табыңыз

a) $y = \ln(x^2 + 5x + 8)$

b) $y = \ln(-4 + 3x - x^2)$

c) $y = \ln(x^2 - 4x + 3)$

d) $y=\dfrac{1}{\ln(1-x)}$

e) $y=\dfrac{1}{\ln\left(1-\dfrac{x}{7}\right)}$

f) $y=\dfrac{1}{\ln\left(4-\dfrac{x}{3}\right)}$

4 $f(f(x))$ күрделі функциясын табыңыз, егер

a) $f(x) = -2x + 1$

b) $f(x) = 3x - 1$

c) $f(x) = 1 + 2/x$

d) $f(x) = 3 + 2/x$

e) $f(x) = 2x / (3x + 1)$

f) $f(x) = 5x / (3x + 1)$

5 $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x + 1$ болсын. Табу керек:

a) $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$, $g(g(x))$ **күрделі функцияларды;**

b) $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$ **кері функцияларды;**

c) $f(g^{-1}(x))$, $g(f^{-1}(x))$, $f^{-1}(g(x))$, $g^{-1}(f(x))$ **күрделі функцияларды**

6 $f(x) = 4x - 1$, $g(x) = 0{,}5x + 3$ **болсын. Табу керек:**
a) $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$, $g(g(x))$ **күрделі функцияларды;**
b) $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$ **кері функцияларды;**
c) $f(g^{-1}(x))$, $g(f^{-1}(x))$, $f^{-1}(g(x))$, $g^{-1}(f(x))$ **күрделі функцияларды;**

7 $y = f(x)$ **функциясы үшін** $y=f^{-1}(x)$ **кері функциясын тап**
a) $y = 2x-3$ b) $y = 0.5x+1$ c) $y = 2+1/x$ d) $y = 1-2/x$
e) $y = x/(x+1)$ f) $y = 1/(1-x)$

8 $f^{-1}(g(x))$ **күрделі функциясын тап;**

a) $f(x)=-2x+5$,	$g(x)=4x+7$	b) $f(x)=3x-1$,	$g(x)=-6x+5$
c) $f(x)=-x+3$,	$g(x)=4x+5$	d) $f(x)=1+2/x$,	$g(x)=3x+4$
e) $f(x) = 2+1/x$,	$g(x)=3+4/x$	f) $f(x)=4+5/x$,	$g(x)=3+2/x$

9 x_0 **нүктесінде** $f(g^{-1}(x))$ **күрделі функциясының мәнін тап;**

a) $f(x) = 5x + 8$,	$g(x) = -x + 4$,	$x_0 = 7$
b) $f(x) = 2x - 5$,	$g(x) = 4x - 3$,	$x_0 = 1$
c) $f(x) = 3x + 6$,	$g(x) = -4x + 5$,	$x_0 = 1$
d) $f(x) = 4x + 5$,	$g(x) = -4x + 1$,	$x_0 = 3$
e) $f(x) = 9 + 4/x$,	$g(x) = 4 + 2/x$	$x_0 = 1$
f) $f(x) = 7 + 6/x$,	$g(x) = 5 + 3/x$	$x_0 = 1$

10 **Берілген сызықтық функциялардың барлық қасиеттерін қарастырыңыз**
a) $f(x) = 3x - 1$, b) $f(x) = -x + 2$, c) $f(x) = 2x + 1$,
d) $f(x) = 0{,}5x + 3$, e) $f(x) = -4x + 5$, f) $f(x) = 4x - 3$

11 **Кейбір тауарларға сұраныс функциялары келесі түрде** $Q = Q(p)$ **берілсін.**
1) сұраныс функциясының анықталу облысын және мәндер облысын табыңыз**;**
2) сұраныс қисығын салыңыз (құру);
3) p_1 **и** p_2 **бағасында сұраныс көлемін табыңыз;**
4) p_1**-ден** p_2**-ге дейін баға өскен кезде сұраныс көлемінің өзгеруін табыңыз;**
5) сұраныс бағасының кері функциясын табыңыз

a) $Q = 20 - 2p$,	$p_1 = 3$, $p_2 = 8$
b) $Q = 6/(p + 1) - 1$,	$p_1 = 1$, $p_2 = 2$
c) $Q = 24/(p + 1) - 2$,	$p_1 = 2$, $p_2 = 5$
d) $Q = 100/(1 + p)^2 - 1$,	$p_1 = 1$, $p_2 = 4$
e) $Q = 12 - 2\sqrt{p}$,	$p_1 = 4$, $p_2 = 16$
f) $Q = 4(12 - p)/(p + 1)$,	$p_1 = 1$, $p_2 = 3$

12 **Кейбір тауарларға сұраныс пен ұсыныс функциялары** $Q = Q(p)$ **және** $S = S(p)$ **түрінде болсын.**

1) p_0 тепе-теңдік бағасын және Q_0 тепе-теңдік сатылымын (көлемін) табыңыз;
2) сұраныс пен ұсыныс қисықтарын салыңыз (құрыңыз);
3) сұраныс пен ұсыныс функциясының анықтама облысын және мәндер облысын табыңыз;
4) p_1 бағасындағы тауар тапшылығын және p_2 бағасындағы артық тауарды есептеңіз және сызбада көрсетіңіз

a) $Q = 8 - p$,	$S = 2p - 4$,	$p_1 = 3$,	$p_2 = 7$
b) $Q = 10 - p$,	$S = 0.5p + 1$,	$p_1 = 2$,	$p_2 = 8$
c) $Q = 10 - p$,	$S = 3p - 6$,	$p_1 = 3$,	$p_2 = 7$
d) $Q = 14 - 2p$,	$S = 2p - 6$,	$p_1 = 4$,	$p_2 = 6$
e) $Q = 8 - p$,	$S = 3p - 4$,	$p_1 = 2$,	$p_2 = 7$
f) $Q = 12 - p$,	$S = 1.5p - 3$,	$p_1 = 4$,	$p_2 = 10$

13 Екі нүктеде берілген, сызықтық интерполяция формуласы бойынша сұраныс пен ұсыныс $Q=D(p)$ және $Q=S(p)$ функцияларын тауып, есепте:
1) тепе-теңдік бағаны;
2) сатудың тепе-теңдік көлемін;
3) тепе-теңдік бағадағы кірісті.

a) $D(1)=9$,	$D(10)=4.5$,	$S(5)=7$,	$S(11)=10$
b) $D(4)=12$,	$D(12)=8$,	$S(3)=5$,	$S(15)=17$
c) $D(4)=9$,	$D(10)=3$,	$S(3)=7$,	$S(10)=10.5$
d) $D(6)=15$,	$D(10)=13$,	$S(1)=7$,	$S(10)=16$
e) $D(5)=12$,	$D(7)=10$,	$S(1)=6$,	$S(9)=14$
f) $D(3)=10$,	$D(6)=4$,	$S(1)=4$,	$S(8)=7.5$

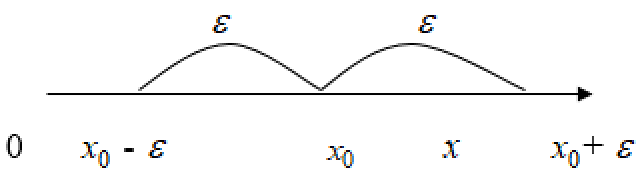
9-тақырып. Функцияның шегі және үзіліссіздігі

Дәріс мақсаты: Студенттерді дифференциалдық және интегралдық есептеулер аппараты дамуына және математика ғылымының басқа бөлімдеріне де негіз болатын математиканың негізгі ұғымдарының бірі – функция шегі ұғымымен және шектің экономикада қолданылуларымен таныстыру.

Дәріс жоспары:
1. Нүктенің аймағы. Сан тізбегі. Сан тізбегінің шегі.
2. Функция шегі ұғымы. Шексіз үлкен және шексіз кіші функциялар.
3. Функция шегі туралы негізгі теоремалар.
4. Функцияның нүктедегі және кесіндідегі үзіліссіздігі.
5. Екі тамаша шек. e саны. Күрделі және үзіліссіз процент есептеу.

1.1 Негізгі теориялық мәлімет

x_0- кез келген нақты сан болсын. x_0 нүктесінің ***аймағы*** деп x_0 нүктесін қамтитын кез келген (*a*,*b*) интервалы аталады. Дербес жағдайда $(x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$ интервалы x_0 нүктесінің ***эпсилон-аймағы*** деп аталады , мұнда $\varepsilon > 0$. x_0 саны аймақтың ***центрі*** деп, ал ε саны аймақтың ***радиусы*** деп аталады. $|x - x_0| < \varepsilon$ теңсіздігінің орындалуы *x* нүктесі x_0 нүктесінің ε -аймағына түскенін көрсетеді (1-сурет).



1-сурет. Нүктенің ε -аймағы.

Егер белгілі бір заңмен әрбір натурал *n* санына нақты бір a_n саны сәйкес қойылса, онда $\{a_n\}$ ***сан тізбегі*** берілді дейді: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

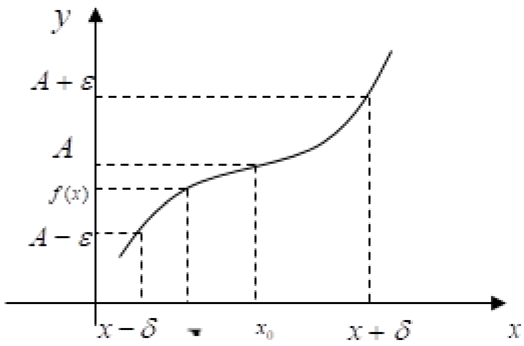
Басқаша айтқанда, ***сан тізбегі*** дегеніміз - аргументі натурал сандар болатын функция: $a_n = f(n)$. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ сандары тізбек мүшелері деп, ал a_n саны берілген тізбектің *жалпы* немесе *n- ші мүшесі* деп аталады. Тізбек оның жалпы мүшесінің формуласы арқылы беріледі:

$$a_n = n^2 + 1; \quad u_n = (-1)^n \cdot n; \quad x_n = \frac{1}{n}; \quad a_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in N$$

Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін ε -нен тәуелді *N* номері табылып, сан тізбегінің барлық номерлері $n > N$ мүшелері үшін $|a_n - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда А саны $\{a_n\}$ ***тізбегінің шегі*** деп аталады және $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ деп жазылады.

Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін ε -нен тәуелді $S > 0$ саны табылып, $|x| > S$ орындалатындай барлық *x* үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда А саны $y = f(x)$ функциясының $x \to \infty$ ұмтылғандағы ***шегі*** деп аталады және $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ деп жазылады.[3]

Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін ε -нен тәуелді $\delta > 0$ саны табылып, барлық $|x - x_0| < \delta$ шартын қанағаттандыратын және $x \neq x_0$ үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда А саны $y = f(x)$ функциясының $x \to x_0$ ұмтылғандағы ***шегі*** деп аталады және $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ деп жазылады.



2-сурет. Функцияның нүктедегі шегінің геометриялық мағынасы.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ функция шегінің ***геометриялық мағынасы*** x_0 нүктесіне өте жақын жатқан барлық x нүктелері үшін сәйкес функция мәндері А санына өте жақын болатынын білдіреді. (2-сурет).

$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$ - сол жақ шек; $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$ - оң жақ шек.

Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ болса, онда x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясы ***шексіз үлкен*** деп аталады.

Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ болса, онда x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясы ***шексіз аз*** деп аталады.

Функция шегі туралы негізгі теоремалар:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) \pm \varphi(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) \cdot \varphi(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$;
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \left[C \cdot f(x)\right] = C \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
5. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}$, егер $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) \neq 0$

Мысалдар: **а)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4-3n}{7n+1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n} - 3}{7 + \frac{1}{n}} = \frac{0-3}{7+0} = -\frac{3}{7}.$$

б)

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 3x - 10} = \frac{(-1)^2 - 10\cdot(-1) + 25}{(-1)^2 - 3\cdot(-1) - 10} = \frac{1+10+25}{1+3-10} = \frac{36}{-6} = -6.$$

с)

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{7+x^2} - 4}{5x^2 + 14x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{7+x^2} - 4\right)\left(\sqrt{7+x^2} + 4\right)}{5(x+3)(x-\frac{1}{5})\left(\sqrt{7+x^2} + 4\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{7 + x^2 - 16}{5(x+3)(x-\frac{1}{5})\left(\sqrt{7+x^2} + 4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{5(x+3)(x-\frac{1}{5})\left(\sqrt{7+x^2} + 4\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)}{5(x-\frac{1}{5})\left(\sqrt{7+x^2} + 4\right)} = \frac{-6}{-16\cdot 8} = \frac{3}{64}$$

д) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=27$$

Егер x_0 нүктесінде функцияның шегі мен мәні тең болса, онда ол нүктеде $f(x)$ функциясы ***үзіліссіз*** деп аталады. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Егер $y=f(x)$ функциясы $(a;b)$ интервалының әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда ол осы интервалда үзіліссіз деп аталады.

Функция үзіліссіз болмайтын нүктелер функцияның ***үзіліс нүктелері*** деп аталады.

Тамаша шектер.

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad 2.\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Негізі e саны болатын логарифм натурал логарифм деп аталады және $\ln x$ деп белгіленеді.

Мысалдар: **а)** $$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{x}\cdot\frac{x}{x}\right]=$$

$$4\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^{-2}\frac{\sin x}{x}=4$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{3x^2-x+1}\right)^{3x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1-x+x}{3x^2-x+1}\right)^{3x+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{3x^2-x+1}\right)^{\left(\frac{3x^2-x+1}{x}\right)\left(\frac{x}{3x^2-x+1}\right)(3x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{x(3x+4)}{3x^2-x+1}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{3x^2+4x}{3x^2-x+1}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{3+4/x}{3-1/x+1/x^2}\right)}=e^1=e$$

Үзіліссіз процент есептеу есебін қарастыралық. Банкке салынған алғашқы қор S_0 ақша бірлігі болсын. Банк әр жыл сайын оған $p\%$ жылдық өсім төлесін. Сонда t жылдан соң қордың мөлшерін S_t тап.

Жылдық өсім $p\%$ болғанда әр жыл сайын қордың мөлшері $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ есе артады. Сонда t жылдан соң қордың мөлшері күрделі процент формуласы бойынша есептеледі: $S_t = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$. Егер қорға күрделі процентті жылына бір рет емес n рет есептесек, онда қордың мөлшері t жылдан соң $S_t = S_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}$ болады, ал үзіліссіз процент есептегенде ол $S_t = \lim\limits_{n\to\infty}\left[S_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{tn}\right] = S_0 e^{\frac{pt}{100}}$ болады.

1.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Нүктенің аймағы дегеніміз не?
2. Сан тізбегі деп не аталады?
3. Сан тізбегінің шегі деп не аталады?
4. Тізбек шегінің анықтамасын тұжырымда.
5. Функцияның нүктедегі және шексіздіктегі шегінің анықтамасын тұжырымда.
6. Қандай функция шексіз аз (шексіз үлкен) деп аталады?
7. Функция шегінің негізгі қасиеттерін ата.
8. Қандай функция нүктеде және интервалда үзіліссіз деп аталады?
9. Бірінші және екінші тамаша шектердің формулаларын жаз.
10. Қандай логарифм натурал деп аталады?

1.3 Есептер шығару

1 Шекті есептеңіз

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2+3}{n^3+n^2+5}$ **1.2** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-1}{3n^2+2n-3}$ **1.3** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3n^2-4n+1}{n^2-n+2}$

1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n-2}{n^3+2n-3}$ **1.5** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-2}{4n^3+9n-1}$ **1.6** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^3+n^2+1}{2n^3+5n^2+4}$

2 Шекті есептеңіз

2.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}$ **2.2** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$ **2.3** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$

2.4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\sin 3x}$ **2.5** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 4x}$ **2.6** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin x}$

3 Шекті есептеңіз

3.1 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$ **3.2** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ **3.3** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x+2}$

3.4 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-2}{x^2-3x+2}$ **3.5** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+4x+3}$ **3.6** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+2}{x^2+3x+2}$

10-тақырып. Функцияның туындысы, дифференциалы.

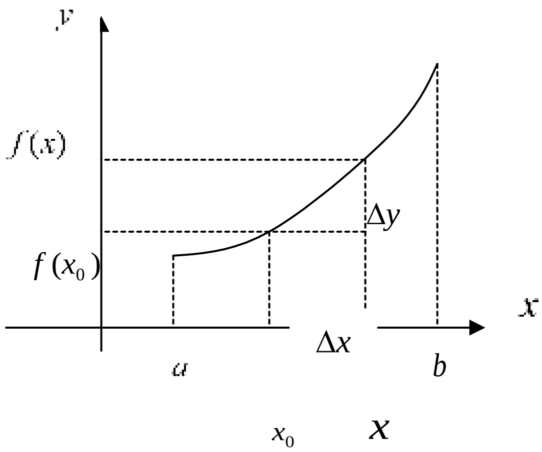
Дәріс мақсаты: Студенттерді бір айнымалы функцияның туындысы, оның геометриялық, физикалық, экономикалық мағыналары және негізгі дифференциалдау ережелерімен таныстыру.Туынды ұғымын практикалық мақсатқа қолдану – әртүрлі функциялардың мәндерін функция дифференциалы ұғымы арқылы жуықтап есептеу.

Дәріс жоспары:

1. Аргументтің және функцияның өсімшесі.
2. Туындының анықтамасы.
3. Элементар функциялардың туындысы және негізгі дифференциалдау ережелері.
4. Күрделі, кері және айқын емес функциялардың туындысы.
5. Туындының геометриялық, физикалық және экономикалық мағынасы.
6. Дифференциал анықтамасы және оның геометриялық мағынасы.
7. Дифференциалдың негізгі қасиеттері.
8. Дифференциалды жуықтап есептеуге қолдану.
9. Дифференциалдық есептеудің негізгі теоремалары.

1.1 Негізгі теориялық мәлімет

$y = f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде анықталсын. $x = x_0$ осы кесіндінің тұрақты нүктесі, ал x осы $[a;b]$ кесіндісіне тиісті айнымалы нүкте болсын.



2-сурет. Аргументтің және функцияның өсімшесі.

x_0 нүктесінен x нүктесіне көшкенде аргументтің мәні $\Delta x = x - x_0$ шамасына өзгереді. Осы шама ***аргументтің өсімшесі*** деп аталады.

Сонда функция мәні $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ шамаға өзгереді. Осы шама x_0 нүктесіндегі ***функция өсімшесі*** деп аталады.

Анықтама. x_0 нүктесіндегі $f(x)$ ***функциясының туындысы*** деп функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының $\Delta x \to 0$ ұмтылғандағы шегі (егер ол шек бар болса) аталады:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Функция туындысының бірнеше белгілеулері бар: $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Егер x нүктесінде функцияның ақырлы туындысы болса, онда функция ол нүктеде ***дифференциалданатын*** деп аталады. Функцияның туындысын табу амалы функцияны ***дифференциалдау*** деп аталады.

Туынды табу кестесі:

1. $C' = 0$, C- const
2. $(x^a)' = \alpha x^{a-1}$ Дербес жағдайда $x' = 1$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad (a^x)' = a^x \ln a$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
13. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Негізгі дифференциалдау ережелері:

Егер $u = u(x)$; $v = v(x)$ дифференциалданатын функциялар болса, онда мына формулалар орындалады:

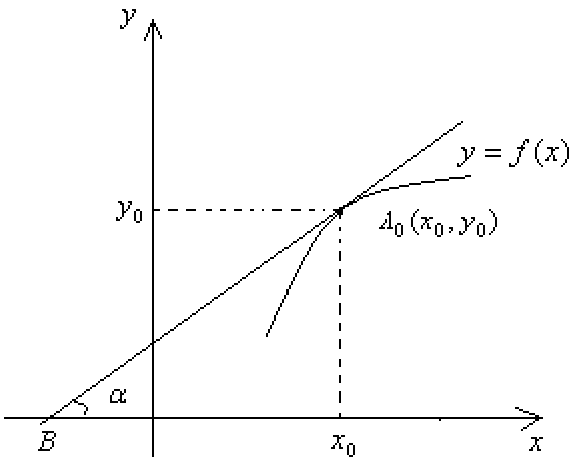
1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$;
3. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Теорема. Егер $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ өз аргументтері бойынша дифференциалданатын функциялар болса, онда $y = f(\varphi(x))$ күрделі функциясының туындысы болады және ол берілген функцияның аралық аргумент бойынша туындысы мен аралық аргументтің тәуелсіз айнымалы x бойынша туындысының көбейтіндісіне тең, яғни

$$y'_x = f'(u)\cdot u' \text{ немесе } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Теорема. Туындысы нольге тең болмайтын дифференциалданатын функцияның кері функциясының туындысы берілген функция туындысының кері шамасына тең, яғни $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Туындының геометриялық мағынасы. Егер қисық $y = f(x)$ теңдеуімен берілсе, онда $f'(x_0) = tg\alpha = k$ осы функция графигіне x_0 нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентіне тең, ал α – жанаманың көлбеулік бұрышы. Сонда $y = f(x)$ қисығына $A_0(x_0, y_0)$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуі (3-сурет) мына түрде болады: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.



3-сурет. Туындының геометриялық мағынасы.

Туындының физикалық мағынасы. Егер нүкте түзу бойымен $S = S(t)$ заңымен қозғалсын, мұнда S - жүрілген жол, t – уақыт болсын. Сонда $S'(t_0)$ нүктенің t_0 моментіндегі қозғалыс жылдамдығын көрсетеді: $v(t_0) = s'(t_0)$.

Осы сияқты, $y = f(x)$ функциясының туындысы x аргументінің өзгерісіне қарағанда y функциясының өзгеру жылдамдығына тең.[3]

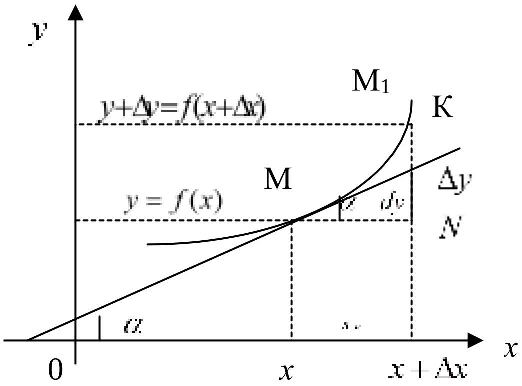
Туындының экономикалық мағынасы. Егер $Q = Q(t)$ функциясы t уақыт моментінде өндірілген өнім көлемін Q өрнектесе, онда $Q'(t_0)$ туындысы моментіндегі еңбек өнімділігін өрнектейді.

Дифференциалданатын $y = f(x)$ функцияның Δy өсімшесін мына түрде беруге болады: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, мұнда $f'(x)$- $f(x)$ функциясының туындысы; Δx – тәуелсіз айнымалының өсімшесі; $\alpha(\Delta x)$ –шексіз аз шама.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының ***дифференциалы*** деп функция өсімшесінің туынды мен тәуелсіз айнымалы өсімшесінің көбейтіндісіне тең, Δx-ке қарағанда сызықтық, бас бөлігі аталады: $dy = f'(x)\Delta x$.

Тәуелсіз айнымалының дифференциалы осы айнымалының өсімшесіне тең: $dx = \Delta x$. Сондықтан функция дифференциалының формуласын мына түрде жазуға болады: $dy = f'(x)dx$.

Геометриялық мағынасы: Функция дифференциалы дегеніміз - $y = f(x)$ функциясының x аргументі Δx өсімшесін алғанда осы нүктеде жүргізілген жанаманың ординатасының өсімшесі.



4-сурет. Дифференциалдың геометриялық мағынасы.

Дифференциалдың қасиеттері:

1. dC=0, мұнда C- const;
2. d(u ± v)=du ± dv;
3. d(Cu)= Cdu;
4. d(uv)= vdu + udv;
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$;
6. $dy = f'(u)du$, мұнда $u = \varphi(x)$, $y = f(u)$.

Дифференциалдың жуықтап есептеуде қолданылуы:

Δx-тің өте аз шамасында функцияның толық өсімшесі мен дифференциалдың айырмашылығы өте аз, яғни: $\Delta y \approx dy$. Осы жағдай жуықтап есептеулерге қолданылады: $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

1.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Аргумент өсімшесі және функция өсімшесі деп не аталады?
2. Функция туындысының анықтамасын тұжырымда.
3. Негізгі элементар функциялардың туындыларының формулаларын жаз.
4. Функцияны дифференциалдаудың негізгі ережелерін жаз.
5. Күрделі және кері функцияларды дифференциалдау ережесін тұжырымда.
6. Туындының геометриялық, физикалық және экономикалық мағынасы.

7. Функция дифференциалы деп не аталады және оның геометриялық мағынасы қандай
8. Функция дифференциалының негізгі қасиеттерін ата.
9. Функцияның мәнін оның дифференциалы арқылы жуықтап есептеуге болатын формуланы жаз.

1.3 Есептер шығару

1 **x_0 нүктесіндегі параболаға жанаманың теңдеуін табыңыз**

a) $y = x^2 – x + 4$, x_0=3,нүктесінде
b) $y = 6x^2 – 2x + 4$, x_0=1 нүктесінде
c) $y = 2x^2 – 17x + 4$, x_0=3нүктесінде
d) $y = (5x – 1)x$, x_0=1нүктесінде
e) $y = 2x^2 + x + 3$, x_0=0нүктесінде

2 **$y = kx+b$ түзуі параболаның жанамасына параллель болатын x_0-сін тап**

a) $y=6x^2–46x+7$, $y=2x+1$ b) $y=4x^2–2x–1$, $y=6x–6$
c) $y=3x^2–41x+6$, $y=x–5$ d) $y=6x^2–40x–3$, $y=8x+1$
e) $y=2x^2–13x+1$, $y=7x–5$

3 **$x=x_0$, нүктесіндегі $y = f(x)$ функциясының графигіне жанаманың теңдеуін жазып $x=x_1$ нүктесіндегі жанама ординатасын есептеңдер.**

a) $y=2x^2–17x–2$, $x_0=4$, $x_1= -20$ нүктелерінде,
b) $y=x^2–x+1$. $x_0=0$, $x_1=3$ нүктелерінде,
c) $y= -2x^2–9x–1$, $x_0= -2$, $x_1=5$ нүктелерінде
d) $y= -x^2+5x+1$, $x_0=3$, $x_1=7$ нүктелерінде
e) $y=3x^2+9x+4$, $x_0= -1$, $x_1=1$ нүктелерінде

4 **Тігінен жоғары шығарылған дене $S=S(t)$заңы бойынша қозғалады, мұндағы S – көтерілу биіктігі, t – қозғалыс уақыты. Табу керек:**
1) уақыттың бастапқы кезіндегі дененің жылдамдығын;
2) дененің жермен жанасу (үйкелесу, жерге тиген) сәтіндегі жылдамдығын;
3) ең жоғары көтерілген биіктікті;
4) денені жіберген (шығарған) кездегі биіктікті

a) $S=S(t)= -t^2+4\,t+5$ b) $S=S(t)= -t^2+2\,t+3$
c) $S=S(t)= -2.5\,t^2+10\,t+30$ d) $S=S(t)= -0.25\,t^2+t+8$
e) $S=S(t)= -t^2+2\,t+15$

5 **Бригаданың шығарылатын өнім Q көлемінің жұмысы t уақытан тәуелділігі $Q=Q(t)$ $(0 < t < 8)$ теңдеуімен берілсін. Уақыт $t=t_1$-ге тең болған кезде:**
1) бригаданың еңбек өнімділігі;
2) еңбек өнімділігінің өзгеру жылдамдығы.
есептеу керек

a) $Q=Q(t)= -t^3+12t^2$, $t_1= 5$
b) $Q=Q(t)= -t^3+12t^2+4t$, $t_1= 2$
c) $Q=Q(t)= -0.5t^3+6t^2$, $t_1= 2$
d) $Q=Q(t)= -0.5t^3+6t^2+2t$, $t_1= 6$
e) $Q=Q(t)= -t^4+130t^2$, $t_1= 5$

6 Функцияның туындысын есептеңіз

a) $y = 3x^5 - 2x^3 + 4x - 1$
b) $y = 6x \cdot \sqrt[3]{x} + 1$
c) $y = (5x^3 - 2x + 1)e^x$
d) $y = \dfrac{x}{x^2 - 3}$
e) $y = \dfrac{4x^2 - 1}{2x^3 + 1}$
f) $y = \dfrac{2}{x} - 4\sqrt{x}$
g) $y = (3x^2 - 5) \cdot \ln x$
h) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

a1) $y = \dfrac{x^4 - 6x^2 + 5}{4}$
b1) $y = \dfrac{3x^2}{3x + 4}$
c1) $y = \dfrac{10x}{5x^2 + 2}$
d1) $y = (1 + 2x)\ln x$
e1) $y = \dfrac{x}{2x + 1}$
f1) $y = \dfrac{3x + 2}{2 - x^2}$
g1) $y = 2\sqrt{x} - \dfrac{5}{x}$
h1) $y = (3x - 2)^5$

a2) $y = \dfrac{x}{2 - x}$
b2) $y = (1 + 2x)\ln x$
c2) $y = x\sqrt{9 - 8x}$ 2
d2) $y = \dfrac{3x}{x - 1}$
e2) $y = \sqrt{8x - 15}$
f2) $y = (3x + 1) \cdot e^x$
g2) $y = xe^{x-2}$
h2) $y = \dfrac{x}{3 - 2x^4}$

7 Функцияның туындысын есептеңіз

a) $y = \ln(5x^2 + 2)$
b) $y = \sqrt{4x - 1}$
c) $y = \sin(2x^7 - 3x)$
d) $y = (1 - x^2 + x)^4$
e) $y = \sqrt{2x^4 + 2x - 3}$
f) $y = \ln(5x^2 + 2x + 1)$
g) $y = e^{2x^5 - 4x}$
h) $y = \sqrt{x^4 + 2x + 2}$

a1) $y = x^2\sqrt{4x - 3}$
b1) $y = e^{6x^8 - 5x}$
c1) $y = \sqrt{x^5 + 3x - 3}$
d1) $y = \cos(2x + 3)$
e1) $y = (7 - x^3 + x)^3$
f1) $y = x\sqrt{9 - 8x}$
g1) $y = \sqrt{5 - 4x^2}$
h1) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

a2) $y = e^{4x^5 + 2x}$
b2) $y = 2\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$
c2) $y = \dfrac{3x + 2}{2 - x^2}$
d2) $y = \dfrac{x^2}{4 - 3x^2}$
e2) $y = \sin(1 - x^2)$
f2) $y = \ln(3x - 2x^3)$
g2) $y = (4 - x^3 - 2x)^3$
h2) $y = (3 - 2x)^4$

8 $x = x_0$ нүктесінде функцияның туындысын есептеңіз

a) $y = \dfrac{3 + 2x}{3 + x}$, $x = -2$
b) $y = x^2\sqrt{4x - 3}$, $x = 1$
c) $y = (3x - 1) \cdot \cos x$, $x = 0$
d) $y = (3x + 2)\ln x$, $x = 1$
e) $y = xe^{x-2}$, $x = 2$

a1) $y = 2 + 3x^2\sqrt{x} + \sqrt{x}$, $x = 1$
b1) $y = 1 - 2x^5\sqrt{x} - 8/x$, $x = 1$
c1) $y = \dfrac{3x + 2}{2 - x^2}$, $x = 1$
d1) $y = \sin(2x^5 - 5x)$, $x = 0$

f) $y = x\sin(x^2 - 1)$, x=1

g) $y = e^{4x^5+3x}$, x = 0

h) y = ln(x^2 + 2x – 7), x = 2

e1) $y = \dfrac{x^2}{4 - 3x^2}$, x = 1

f1) $y = (1 - x^2 + x)^4$, x = 0

g1) $y = \sqrt{2x^4 + 2x - 3}$, x = 1

h1) $y = \sqrt{x^4 + 2x + 2}$, x = –1

9	***x=x₀* нүктесінде аргументтің Δ*x* өсуіне сәйкес *y=f*(*x*) функциясының дифференциалын есептеңіз**		
	a) $y = \dfrac{5x}{x+1}$,	x_0 = 0,	$\Delta x = 0{,}4$
	b) $y = e^{4x-8}$,	x_0 = 2,	Δx = 0.5
	c) $y = (3x - 8)^{20}$, d) $y = x \ln (5x^4 - 4)$, e) $y = x \ln (2x^2 - 1)$, *f*) y = ln (3 - 2 x), g) y = ln (2+4sin x), h) y = ln (1+2tg x),	x_0 = 3, x_0 = 1, x_0 = -1, x_0 = 1, x_0 = 0, x_0 = 0,	Δx= -0.1 Δx = -0.2 Δx = 0.5 Δx = 0.5 Δx = 0.5 Δx = -0.5
10	***x=x₀* нүктесінде аргументтің Δ*x* өсуіне сәйкес *y=f*(*x*) функциясының дифференциалын есептеңіз**		
	a) $y = \sqrt{4x - 15}$, b) $y = \sqrt{5x - 4}$, c) $y = 1/(1-2x)^3$, d) $y = x^4(4x+5)^5$, e) $y = x^3/(2 - x)$,	x_0= 4, x_0= 1, x_0= 1, x_0= -1, x_0 = 1,	Δx = 0.5 Δx = -2 Δx = 0.5 Δx = -0.5 Δx = 0.6
11	***Дифференциалдың көмегімен x = x₀ нүктесі Δx өзгергенде y=f(x) функциясы жуықтап алғанда қаншаға өзгереді***		
	a) y = sin(10x–20), b) $y = e^{20-5x}$, c) $y = e^{4x+12}$, d) $y = (4x^3+3)\cdot e^{2x}$, e) $y = (5-2x)\cdot$tg 2x , f) $y = (5x^3+2)\cdot$tg 5x,	x_0 =2, x_0 = 4, x_0 = -3, x_0= 0, x_0= 0, x_0 = 0,	Δx= -0.05 Δx = 0.04 Δx = 1.5 Δx = 0.5 Δx = 0.1 Δx = -0.6
12	***Дифференциалдың көмегімен x = x₀ нүктесіндегі y=f(x) функциясының жуық мәнін табыңыз***		
	a) $y = 3\sqrt{2x^2 - 7}$,	x_0 = 1.95	
	b) $y = \sqrt{3x^4 - 39}$,	x_0 = –2.1	
	c) $y = 2\cdot\exp(5x^2 - 20)$, d) $y = \exp(4 - 4x^2)$, e) $y = 3x + \sin(4x^3 - 4)$,	x_0 = 1.98 x_0 = –0.9 x_0 = 1.1	

	f) $y = -x + \sin(3x^2 - 12)$, g) $y = -4x + \ln(9 - 2x^2)$, h) $y = 3x + \ln(5 - x^4)$,	$x_0 = -2.1$ $x_0 = -1.8$ $x_0 = 0.8$

11-тақырып. Функция икемділігі

Дәріс мақсаты: Функция икемділігі ұғымы арқылы туындының экономикалық талдауда қолданылуының бір мүмкіншілігін көрсету.

Дәріс жоспары:

1. Функция икемділігінің анықтамасы және оның қасиеттері.
2. Элементар функциялардың икемділігі.
3. Икемділіктің экономикалық талдауда қолданылуы.

1.1 Негізгі теориялық мәлімет

Анықтама. *y* функциясының салыстырмалы өсімшесінің *x* аргументінің салыстырмалы өсімшесіне қатынасының $\Delta x \to 0$ ұмтылғандағы шегі *$E_x(y)$* ***функцияның икемділігі*** деп аталады.

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'$$

Функция икемділігі тәуелсіз айнымалы *x* 1% артқанда $y = f(x)$ функциясы жуықтап алғанда қанша процент өзгеретінін көрсетеді.

Функция икемділігінің негізгі қасиеттері:

1. Функция икемділігі тәуелсіз айнымалы мен функцияның өзгеру қарқынының $T_y = \frac{y'}{y}$ көбейтіндісіне тең: $E_x(y) = x \cdot \frac{y'}{y} = x \cdot T_y$
2. Екі функцияның көбейтіндісінің (бөліндісінің)икемділігі осы функциялардың икемділіктерінің қосындысына (айырмасына) тең: $E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v)$
   $\left(E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v) \right)$
3. Кері функцияның икемділігі - берілген функция икемділігіне кері шама: $E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}$

Элементар функциялардың икемділігі:

а) сызықтық: $E_x(ax + b) = \frac{ax}{ax + b}$;

б) дәрежелік: $E_x(x^a) = a$;

в) көрсеткіштік: $E_x(a^x) = x \ln a$.

Функция икемділігі сұраныс пен ұсынысты талдағанда қолданылады. Сұраныстың *Q* бағаға *P* (немесе табысқа I) қарағанда икемділігі жуықтап алғанда бағаны (табысты) 1% арттырғанда тауарға сұраныс қанша процент өзгеретінін көрсетеді.

Егер сұраныс функциясының икемділігі (абсолют шамасы бойынша) $|E_p(Q)|>1$ болса, онда сұраныс бағаға қарағанда *икемді*; егер $|E_p(Q)|<1$ болса, онда – *икемсіз*; ал $|E_p(Q)|=1$ болса онда *бейтарап* деп есептеледі.

Сұраныстың бағаға қарағанда икемділігі $E_p(Q)=\frac{p}{Q}\cdot Q'_p$ тауардың бағасын 1% арттырғанда тауарға сұраныс шамасының салыстырмалы кемуін көрсетеді және тұтынушылардың өнім бағасы өзгерісіне сезімталдығын сипаттайды

Сұраныстың табысқа қарағанда икемділігі $E_I(Q)=\frac{I}{Q}\cdot Q'_I$ тұтынушы табысы 1% артқанда тауарға сұраныс шамасының салыстырмалы өзгерісін көрсетеді және өнім сапасын сипаттайды. Егер $E_I(Q)>0$ болса, онда тауар *сапалы*; егер $E_I(Q)<0$ болса, онда тауар *сапасыз*.

Сұраныстың бағаға *қима икемділігі* $E_{p_y}(Q)=\frac{p_y}{Q}\cdot Q'_{p_y}$ басқа альтернативті тауар бағасы 1% артқанда тауарға сұраныс шамасының салыстырмалы өзгерісін сипаттайды. Егер $E_{p_y}(Q)>0$ болса, онда тауарлар өзара *ауыстырымды*; егер $E_{p_y}(Q)<0$ болса, онда өзара *толықтырымды* болады.

1.2 Тексеруге арналған сұрақтар:

1. Функция икемділігі деп не аталады?
2. Икемділіктің негізгі қасиеттері қандай?
3. Сұраныстың бағаға икемділігі нені анықтайды?
4. Сұраныс қашан икемді (икемді емес, бейтарап) деп аталады?
5. Сұраныстың табысқа икемділігі нені көрсетеді?
6. Сұраныстың қима икемділігі нені сипаттайды?

1.3 Есептер шығару

1 **$y=f(x)$ функциясы үшін берілген х нүктесінде $E_x(y)$ икемділігін табыңыз және х аргументі q % - ға өзгерген кезде функция шамамен қанша пайызға өзгеретінін анықтаңыз.**

a) $y = x^2 + 2x$	$x = 2$	$q = 3$ %
b) $y = x^5\cdot e^x$	$x = –3$	$q = –1,5$ %
c) $y = 4x – \ln(4 – x^6 – 2x)$	$x = 1$	$q = –0,8$
d) $y = –2x + \ln(–2x^5 + 4x – 1)$	$x = 1$	$q = 0,2$
e) $y = 3x + \sin(4x^2 + x – 14)$	$x = –2$	$q = –0,5$
f) $y = x – 3\sin(x^2 + 3x + 2)$	$x = –2$	$q = –1,2$
g) $y = 1 + \sin(x^2 + 3x + 2)$	$x = –1$	$q = 1,2$
h) $y = 4 + \ln(x^6 – 2x – 2)$	$x = –1$	$q = –0,8$

2 **Өнімнің *Q=D(p)* сұраныс функциясы берілсін. Р = Р0 бағасы бойынша сұраныстың икемділігін тауып, тауарға сұраныстың икемді, бейтарап немесе икемді еместігін анықтаңыз**

a) $Q = 2p^2 - 20p + 47$ $\quad p = 2$
b) $Q = p^2 - 8p + 13$ $\quad p = 1$
c) $Q = 3p^2 - 30p + 75$ $\quad p = 1$

d) $Q = 18 - 2\sqrt{P}$ $\quad p = 16$
e) $Q = 12 - 2\sqrt{P}$ $\quad p = 25$
f) $Q = 30 - 4\sqrt{P}$ $\quad p = 25$

g) $Q = (26 - 3p)/p$ $\quad p = 2$
h) $Q = (24 - 2p)/p$ $\quad p = 8$
i) $Q = (21 + 3p)/p$ $\quad p = 3$

3 **$Q = D(p)$ және $Q = S(p)$ сұраныс пен ұсыныстың функциялары болсын. Табу керек:**
1) тепе-теңдік бағаны;
2) тепе-теңдік бағадағы сұраныстың икемділігін;
3) тепе-теңдік бағадағы ұсыныстың икемділігін және тепе-теңдік бағадағы сұраныс пен ұсыныс икемді, бейтарап немесе икемді емес екенін анықтаңыз
a) $Q = D(p) = 12/(p + 3)$ $\quad Q = S(p) = p - 1$
b) $Q = D(p) = 15/(p + 2)$ $\quad Q = S(p) = p$
c) $Q = D(p) = 16/p$ $\quad Q = S(p) = 4p - 12$
d) $Q = D(p) = 8/p$ $\quad Q = S(p) = 5p - 6$
e) $Q = D(p) = 8 + 14/p$ $\quad Q = S(p) = 2p - 4$
f) $Q = D(p) = 1 + 2/p$ $\quad Q = S(p) = 4p - 6$
g) $Q = D(p) = (4p + 16)/(6p + 4)$ $\quad Q = S(p) = p + 1$
h) $Q = D(p) = 2 + 24/p$ $\quad Q = S(p) = p – 3$

4 **Тұтынушылар мен сатушыларға, бағалары P_1 және P_2 болған кезде, сауалнама жүргізу арқылы кейбір тауарларға $Q_1 = D(p_1)$ және $Q_2 = D(p_2)$ сұраныс пен $S_1 = S(p_1)$ және $S_2 = S(p_2)$ ұсыныс көлемідері белгіленеді. Сызықтық интерполяция әдісімен $Q = D(p)$ сұраныс пен $S = S(p)$ ұсыныс сызықтық функцияларын тауып, келесіні есептеу керек:**
1) тепе-теңдік бағаны;
2) тепе-теңдік бағадағы сұраныстың икемділігін;
3) тепе-теңдік бағадағы ұсыныстың икемділігі және тепе-теңдік баға m%-ке өскенде сұраныс қанша пайызға өзгеретінін, ал тепе-теңдік баға n%-ке өскенде ұсыныстың қанша пайызға өзгеретінін анықтау
a) $D(7) = 12, D(10) = 3$ $\quad S(7) = 2, S(10) = 8$ $\quad m = 1, n = 1.5$
b) $D(9) = 7, D(11) = 3$ $\quad S(9) = 2, S(11) = 8$ $\quad m = 0.4, n = 0.7$
c) $D(5) = 12, D(9) = 2$ $\quad S(5) = 5, S(9) = 9$ $\quad m = 0.4, n = 2$
d) $D(7) = 5, D(10) = 2$ $\quad S(7) = 1.5, S(10) = 9$ $\quad m = 0.6, n = 0.2$
e) $D(1) = 5.5, D(6) = 3$ $\quad S(1) = 1, S(6) = 6$ $\quad m = 2, n = 1.7$
f) $D(7) = 8, D(12) = 3$ $\quad S(7) = 4, S(12) = 9$ $\quad m = 1.4, n = 0.6$
g) $D(7) = 7, D(9) = 1$ $\quad S(7) = 1, S(9) = 7$ $\quad m = 1.1, n = 1.2$

h) $D(4) = 10$, $D(9) = 5$ $S(4) = 1$, $S(9) = 11$ $m = 0.5$, $n = 2$

5.1 Қандай да бір тауарға сұраныстың бағалық икемділігі -0,25, ал сұраныстың кіріс икемділігі 0,8-ге тең болсын. Берілген тауардың бағасы бір мезгілде 8%-ға төмендеп, тұтынушының табысы 5%-ға өссе, сұраныс көлемі шамамен қанша пайызға өзгереді?

5.2 Қандай да бір тауарға сұраныстың бағалық икемділігі -1,2, ал сұраныстың кіріс икемділігі -2 болсын. Берілген тауарға сұраныс көлемі шамамен қанша пайызға өзгереді, егер бір уақытта оның бағасы 2%-ға өссе, ал тұтынушының табысы 0,5%-ға төмендесе

5.3 Қандай да бір тауарға сұраныстың бағалық икемділігі -6, ал сұраныстың кіріс икемділігі 1,5-ке тең болсын. Егер бір уақытта оның бағасы мен тұтынушы табысы сәйкесінше 0,3% және 2% төмендесе, берілген тауарға сұраныс көлемі шамамен қанша пайызға өзгереді?

6 **Q = f (x) фирманың өндірістік функциясы болсын, мұндағы Q – өнім көлемі, x – пайдаланылған ресурс мөлшері. Берілген x мәні үшін пайдаланылған ресурс көлеміне сәйкес өнім көлемінің икемділігін табыңыз және пайдаланылған ресурс көлемі n%-ға өскен кезде өнім көлемі шамамен қанша пайызға өсетінін анықтаңыз.**

a) $Q = \sqrt{9 + 2x^3} - 3$, $x = 2$, $n = 0{,}2$

b) $Q = \sqrt{7 + 2x^2} - 2$, $x = 3$, $n = 0{,}5$

c) $Q = \sqrt{1 + 3x^2} - 1$, $x = 1$, $n = 0{,}6$

d) $Q = 2\sqrt{16 + 9x^4} - 8$, $x = 1$, $n = 2$

e) $Q = 15(x-4)^{1/3} + 20$, $x = 12$, $n = 4$

7 ***C = C(Q)*** **жалпы өндіріс шығындарының функциясы болсын, мұнда Q - өнім көлемі, C - жалпы шығындар. Берілген $Q=Q_0$ үшін жалпы шығындардың өнім көлеміне қатысты икемділігін есептей отырып, өнім көлемі n%-ға өскен кезде жалпы шығындар шамамен қанша пайызға өсетінін анықтаңыз.**

a) $C=C(Q)=Q^3-12Q^2+50Q$, $Q=5$, $n = 6$

b) $C=C(Q)= 0{,}5Q^3 - 3Q^2 +9Q$, $Q=2$, $n=0{,}2$

c) $C=C(Q)= Q^2 + 6Q + 40$, $Q=10$, $n=0{,}3$

d) $C=C(Q)=Q^3- 6Q^2 +18Q$, $Q=4$, $n=0{,}5$

e) $C=C(Q)=Q^3- 6Q^2 +13Q$, $Q=2$, $n=0{,}3$

12-тақырып. Бір айнымалы функцияны зерттеу

Дәріс мақсаты: Туындының функцияның экстремумын табуға қолданылуын көрсету, ол арқылы әллеуметтік-экономикалық заңдылықтарды, құбылыстарды оқып үйрету

Дәріс жоспары:
1. Функцияның өсуі, кемуі және экстремумы.
2. Функция графигінің дөңестігі және иілу нүктелері.
3. Функция графигінің асимптоталары.
4. Функцияны зерттеудің жалпы схемасы.

1.1 Негізгі теориялық мәлімет

Бір айнымалы функцияның экстремумы.

Ферма теоремасы. Егер X аралығында дифференциалданатын $y=f(x)$ функциясы осы аралықтың ішкі x_0 нүктесінде ең үлкен және ең кіші мәнге ие болса, онда ол нүктеде функция туындысының мәні нольге тең болады, яғни $f'(x_0)=0$.

Ролль теоремасы. $y=f(x)$ функциясы мына шарттарды қанағаттандырсын:

1. $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз;
2. $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын;
3. кесіндінің шеткі нүктелерінде мәндері тең, яғни *f(a)=f(b).*

Сонда кесіндінің туындысы нольге тең болатын ең болмағанда бір ішкі нүктесі $c\in(a;b)$ бар болады: $f'(c)=0$.

Лагранж теоремасы. $y=f(x)$ функциясы мына шарттарды қанағаттандырсын:

1. $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз;
2. $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын;

Сонда кесіндінің $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ теңдігі орындалатын ең болмағанда бір ішкі нүктесі $c\in(a;b)$ бар болады.

Лопиталь теоремасы. Екі шексіз аз немесе шексіз үлкен функциялардың қатынасының шегі олардың туындыларының қатынасының (ақырлы немесе ақырсыз) шегіне тең, егер соңғысы көрсетілген мағынада бар болса:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема (*функция өсуінің жеткілікті шарты*). Егер дифференциалданатын $y=f(x)$ функциясының туындысы осы аралықтың барлық нүктелерінде оң (теріс) болса, онда $y=f(x)$ функциясы осы аралықта *өседі (кемиді).*

Анықтама. Егер x_0 нүктесінің аймағында $f(x_0) \geq f(x)$ $\left(f(x_0) \leq f(x)\right)$ теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесі $y = f(x)$ функциясының *максимум (минимум)* нүктесі деп аталады.

Максимум және минимум нүктелері ***экстремум нүктелері*** деп аталады. Максимум (минимум) нүктесіндегі функцияның мәні *функцияның максимумы (минимумы)* деп аталады. Функцияның максимумы және минимумы бір сөзбен ***функция экстремумы*** деп аталады

Теорема *(Экстремумның қажетті шарты).* Функцияның экстремум нүктесінде оның туындысы нольге тең ($f'(x_0) = 0$) немесе болмайды. Экстремумның қажетті шарты орындалатын нүктелер, яғни туындысы нольге тең немесе болмайтын нүктелер *кризистік нүктелер* деп аталады.

Теорема *(экстремумның бірінші жеткілікті шарты).* Егер дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясының туындысы таңбасын x_0 нүктесінен өткенде плюстен (минустен) минуске (плюске) өзгерсе, онда x_0 нүктесі $y = f(x)$ функциясының максимум (минимум) нүктесі болады.

Теорема *(экстремумның екінші жеткілікті шарты).* Егер екі рет дифференциалданатын функцияның бірінші ретті туындысы $f'(x)$ кейбір x_0 нүктесінде нольге тең, ал бұл нүктеде екінші ретті туындысы $f'(x_0)$ оң (теріс) болса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының минимум (максимум) нүктесі болады. [3]

$y = f(x)$ ***функциясын экстремумге зерттеу схемасы:***

1. $y' = f'(x)$ туындысын тап;
2. функцияның кризистік нүктелерін тап;
3. әр кризистік нүктенің оң және сол жағында туындының таңбасын анықта немесе екінші ретті туындыны $f'(x)$ тап және әр кризистік нүктеде оның таңбасын анықта, енді функцияның экстремумы болуы туралы қорытынды жаса;
4. функцияның экстремумдерін тап.

Анықтама. Егер $(a;b)$ интервалында функция графигі кез келген жанамасынан төмен (жоғары) орналасса, онда $y = f(x)$ функциясының графигі $(a;b)$ интервалында дөңес (ойыс) деп аталады.

Теорема. Егер $y = f(x)$ функциясының $(a;b)$ интервалында екінші ретті туындысы бар және $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) болса, онда $(a;b)$ интервалында функция графигі ойыс (дөңес) болады.

Анықтама. Үзіліссіз функция графигінің дөңес және ойыс интервалдарын бөлетін нүкте ***иілу нүктесі*** деп аталады.

Теорема (*иілудің қажетті шарты*). Екі рет дифференциалданатын функцияның $f'(x)$ екінші ретті туындысы x_0 иілу нүктесінде нольге тең болады, яғни $f'(x_0) = 0$.

Теорема (*иілудің жеткілікті шарты*). Егер екі рет дифференциалданатын функцияның $f'(x)$ екінші ретті туындысы кейбір x_0 нүктесінен өткенде таңбасын өзгертсе, онда x_0 оның графигінің иілу нүктесі болады.

$y = f(x)$ ***функциясын дөңестікке және иілу нүктесіне зерттеу схемасы:***

1. $f'(x)$ екінші ретті туындысын тап;
2. екінші ретті туынды нольге тең $f'(x) = 0$ немесе болмайтын нүктелерді тап;
3. табылған нүктелердің оң және сол жағында екінші ретті туындының таңбасын анықта және дөңестілік интервалдары мен иілу нүктелері бар болуы туралы қорытынды жаса;
4. иілу нүктелерінде функцияның мәнін тап.

Функцияны зерттеу

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының ***асимптотасы*** деп график нүктесі координаталар басынын шексіз алшақтағанда $M(x; f(x))$ нүктесі мен осы түзудің ара қашықтығы нольге ұмтылатын қасиетті иемденген түзу.

Вертикаль, горизонталь және көлбеу асимптоталар болады.

Егер $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ болса, онда $x = x_0$ түзуі $y = f(x)$ функциясы графигінің *вертикаль асимптотасы* деп аталады.

Егер $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = в$ болса, онда $y = в$ түзуі $y = f(x)$ функциясы графигінің *горизонталь асимптотасы* деп аталады.

Егер $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0$ және $\lim\limits_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right] = в$ ақырлы шектері бар болса, онда *y=kx+в* түзуі *y=f(x)* функциясы графигінің көлбеу асимптотасы деп аталады.

Функцияны зерттеудің жалпы схемасы:

1) функцияның анықталу облысы және оның анықтау облысы шекараларындағы өзгерісі (сәйкес бір жақты шектерді немесе шексіздіктегі шектерді табыңыз);
2) функцияның жұптығы мен периодтылығын зерттеңіз;
3) үзіліссіз пен үзіліс нүктелерінің интервалдарын (үзіліс түрін көрсете отырып) табыңыз;
4) функцияның нөлдері (яғни, f(x) = 0 болатын x мәндері) және тұрақты таңбасының облыстарын көрсетіңіз;
5) монотондылық пен экстремалдылық интервалдарын табыңыз;
6) дөңес және ойыс аралықтары және иілу нүктелерін табыңыз;
7) функция графигінің асимптоталарын табыңыз;
8) функция графигін салыңыз.

Мысал. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ функциясын толық зертте және графигін сыз.

Шешуі

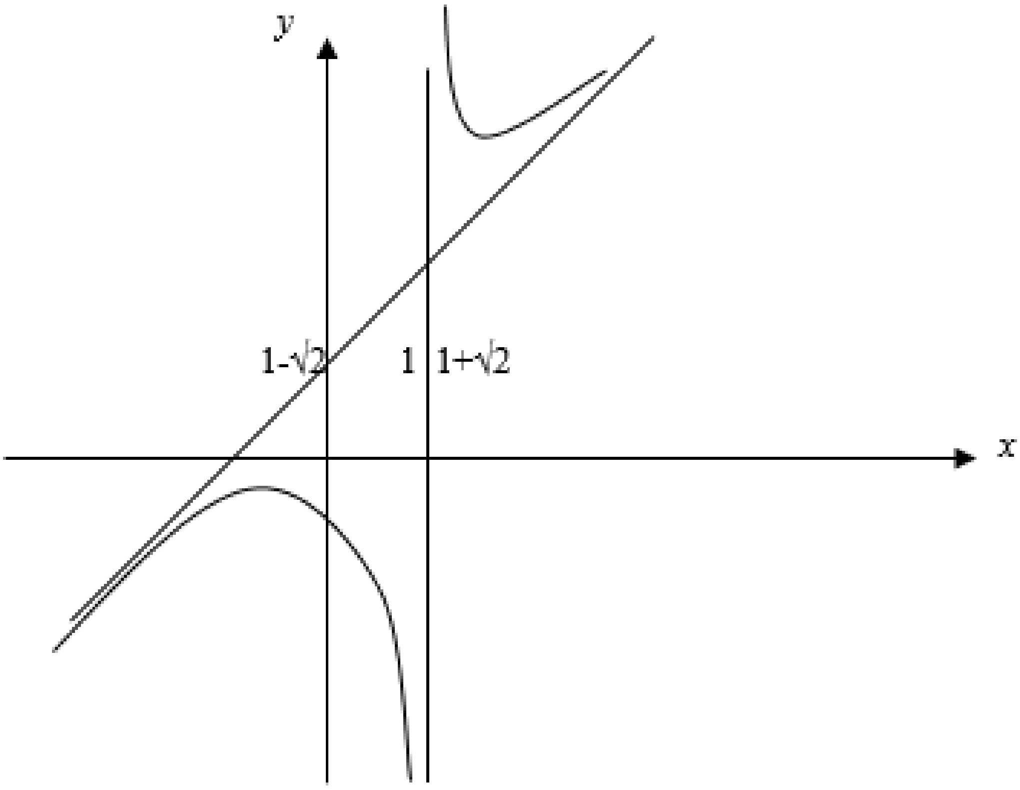
1. Функцияның анықталу облысы: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Сол жақ, оң жақ шектерді қарастырайық (функцияның күй-өзгерісі):

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty,\ \lim_{x\to1-0}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty,\ \lim_{x\to1+0}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty$$

2. $f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{-x-1}\neq\pm f(x)$, болғандықтан, функция тақ та емес, жұп та емес, яғни жалпы түрдегі функция. Функция периодты емес, өйткені тұрақтыға тең емес периодтық функцияның шексіздікте шегі бола алмайды.
3. Функция қарапайым болғандықтан, ол анықтаудың барлық облысында үзіліссіз, яғни үзіліссіз аралығы: $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. Ал х = 1 нүктесі 2-ші екінші текті үзіліс нүктесі екендігі шығады (өйткені бұл нүктедегі бір жақты шектер шексіздікке тең).
4. х-тің кез келген мәнінде $f(x)\neq0$ (яғни, функцияның графигі *Ox* осімен қиылыспайды). $x<1$ кезде $f(x)<0$, ал $x>1$ кезде $f(x)>0$.
5. Бұл сұраққа жауап беру үшін осы функцияның туындысын табайық. $f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}=0$, $x=1\pm\sqrt{2}$ кезде. $f'(x)<0$ кездегі $x\in(1-\sqrt{2};1)\cup(1;1+\sqrt{2})$ - функцияның кему аралықтары; $f'(x)>0$ кездегі $x\in(-\infty;1-\sqrt{2})\in(1+\sqrt{2};+\infty)$ - функцияның өсу аралықтары. $x=1-\sqrt{2}$ кезде, туынды $f'(x)$ таңбасын «+»-тен «-»-ке өзгереді, сондықтан, $x=1-\sqrt{2}$ - максимум нүктесі. $x=1+\sqrt{2}$ кезде, туынды $f'(x)$ меняет знак с «-»-тен на «+»-ке өзгереді, сондықтан, $x=1+\sqrt{2}$ - минимум нүктесі.
6. *x*-тің кез келген мәнінде: $f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}\neq0$

   Сондықтан, функцияның иілу нүктелері жоқ. $x<1$ болған кезде $f'(x)<0$, ал $x>1$ болған кезде $f'(x)>0$, сондықтан функция $(-\infty;1)$ интервалында дөнес, ал $(1;+\infty)$ интервалында - ойыс.
7. Бірінші сұрақтың жауабы х = 1 функция графигінің тік асимптотасы екенін көрсетеді. Сондай-ақ, $x\to\infty$ ұмтылған кезде функцияның ақырлы шегі жоқ, сондықтан оның көлденең асимптоталары да жоқ екені анықталды. 2-ші мысалда $y=x+1$ көлбеу асимптотасы табылды.
8. Жүргізілген зерттеу нәтижелері негізінде $y=\frac{x^2+1}{x-1}$ функциясының графигін саламыз



1.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Ферма, Ролль және Лагранж теоремаларын тұжырымда.
2. Шектерді есептегенде қандай жағдайда Лопиталь ережесі қолданылады?
3. Функцияның интервалда өсу (кему) белгілерін тұжырымда.
4. Функцияның максимум және минимум нүктелерінің анықтамасын бер.
5. Функцияның максимумы және минимумы деп не аталады?
6. Экстремум болуының қажетті шартын тұжырымда.
7. Қандай нүктелер кризистік деп аталады және оларды қалай табуға болады?
8. Экстремум болудың бірінші қажетті шартын тұжырымда және бірінші туынды бойынша функцияны экстремумге зерттеу схемасын түсіндір.
9. Экстремум болудың екінші қажетті шартын тұжырымда және екінші туынды бойынша функцияны экстремумге зерттеу схемасын түсіндір.
10. Берілген кесіндіде функцияның ең үлкен және ең кіші мәнін табу ережесін тұжырымда.
11. Берілген интервалда қисықтың дөңестігі мен ойыстығының анықтамасын бер.
12. Берілген интервалда қисықтың дөңестігі мен ойыстығының жеткілікті шартын тұжырымда.
13. Қисықтың дөңес және ойыс интервалдарын қалай табуға болады?
14. Қисықтың асимптотасы деп не аталады?
15. Вертикаль, горизонталь және көлбеу асимптоталарды қалай табуға болады?
16. Функцияны зерттеудің және графигін салудың жалпы схемасын түсіндір.

1.3 Есептер шығару

1 Функцияның барлық критикалық нүктелерін табыңыз

1.1 $y = 3 + x^4 - 2x^2$ **1.2** $y = 9 + x^3 - 3x^2$

1.3 $y = 3 + x^3 - 12x$ ***1.4*** $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

1.5 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ **1.6** $y = 1 - 4x^2 + 2x^4$

1.7 $y = \frac{x+1}{x}$ **1.8** $y = 1 - \frac{8(x-1)}{x^2}$

1.9 $y = x^4 - 4x^3$ **1.10** $y = x + 1 + \frac{1}{x}$

2 Монотондылық пен экстремумды тексеріп, функцияның графигін құрыңыз

2.1 $y = x^3 - 3x - 2$ **2.2** $y = x^4 - 4x^3$

2.3 $y = 2x^3 - x^4$ **2.4** $y = x^3 + 3x^2$

2.5 $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ **2.6** $y = x^3 + 3x^2 - 9x$

2.7 $y = 4 + 3x^4 - 4x^3$ **2.8** $y = 3 - x\,(x-4)^3$

2.9 $y = 3 - 3x^2 - x^3$ **2.10** $y = 6x^2 + 2x^3$

2.11 $y = 1 + 9x + 6x^2 + x^3$ **2.12** $y = 9x - 3x^2 - x^3$

13-тақырып. Көп айнымалы функция, туындылары және дифференциалдары. Көп айнымалы функцияның экстремумы

Дәріс мақсаты: Функция ұғымын кеңейту және деңгей сызығы ұғымын енгізу. Бірнеше айнымалы функцияның дифференциалдық есептеулерінің негізімен таныстыру. Бірнеше айнымалы функцияның әллеуметтік-экономикалық құбылыстарды сипаттайтын функция экстремумы (тиімді шешім), икемділігі мәндерін есептеуге дифференциалдық есептеулер қалай қолданатынын көрсету.

Қарастырылатын сұрақтар тізімі:

1. *n* айнымалы функцияның анықтамасы.
2. Екі айнымалы функцияның анықтамасы және оның анықталу облысы.
3. Екі айнымалы функцияның графигі және деңгей сызығы.
4. Екі айнымалы функцияның толық және дербес өсімшелері.
5. Бірінші ретті дербес туындылар.
6. Бірнеше айнымалы функцияның икемділігі.
7. Бірінші ретті толық дифференциал және оның қолданылуы.
8. Айқындалмаған функцияның туындысы.
9. Бағыт бойынша туынды және градиент.
10. Жоғары ретті дербес туындылар.
11. Бірнеше айнымалы функция экстремумының анықтамасы
12. Локальдық экстремумның қажетті шарты
13. Екі айнымалы функцияның локальдық экстремумының жеткілікті шарты

14. Бірнеше айнымалы функция экстремумының экономикада қолданылуы.

1.1 Негізгі теориялық мәлімет

Анықтама. n айнымалы шамалар берілсін және олардың X жиынындағы әрбір $(x_1, x_2, ..., x_n)$ мәндер жиынтығына z айнымалысының нақты бір мәні сәйкес келсе, онда X жиынында ***бірнеше айнымалы функция*** $z = f(x_1,...,x_n)$ берілді дейді. $x_1,...,x_n$ айнымалылары *тәуелсіз айнымалылар* немесе *аргументтер*, ал z - *тәуелді айнымалы* немесе *функция* деп аталады. f символы сәйкестік заңын білдіреді. X жиыны функцияның *анықталу облысы* деп аталады.

Бірнеше айнымалы функцияның кейбір мысалдарын қарастырайық:

1. $z = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b$ - *сызықтық функция* деп аталады, мұнда $a_1,...,a_n$, b - тұрақты сандар.

2. $z = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix$ - *квадраттық функция* деп аталады, мұнда b_{ij} - тұрақты сандар.

3. Экономикалық теорияның негізгі ұғымдарының бірі – пайдалылық функциясы. Оның мына түрлері жиі кездеседі:

а) $z = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i - c_i)$, *где* $a_i > 0,\ x_i > c_i \geq 0$ - *логарифмдік функция*;

б) $z = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-b_i}(x_i - c_i)^{1-b_i}$. Мұнда $a_i > 0,\ 0 < b_i < 1;\ xi > c_i \geq 0$. Мұндай функция *тұрақты икемділік функциясы* деп аталады.

Ең үлкен өнім көлемінің Q пайдаланылған ресурстер мөлшерінен $x_1, x_2 ..., x_n$ тәуелділігі $Q = f(x_1,...,x_n)$ *өндірістік функция* деп аталады. Ең жиі кездесетін өндірістік функция $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ *Кобба-Дуглас* функциясы, мұнда K- өндірістік фонд көлемі, L- еңбек шығыны, α және β параметрлері $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta \leq 1$ шарттарын қанағаттандырады.

Анықтама. Егер $D = \{(x, y)\}$ сан жиынының кез келген реттелген сан жұбына (x,y) кейбір f ереже бойынша Z жиынының z саны сәйкес қойылса, онда D жиынында $z = f(x,y)$ функциясы берілді дейді.
x және y айнымалылары *тәуелсіз айнымалылар* (немесе *аргументтер*), ал z - *тәуелді айнымалы* немесе *екі айнымалы функция* деп аталады. $D = \{(x, y)\}$ жиыны функцияның *анықталу облысы,* $Z = \{f(x, y)\}$ функцияның *мәндер облысы* деп аталады.

Тік бұрышты координаталар жүйесінде әрбір реттелген сан жұбына (x,y) xOy жазықтығының жалғыз M нүктесі сәйкес және керісінше, әрбір M нүктеге жалғыз ғана реттелген сандар жұбы (x,y) сәйкес болатындықтан, екі айнымалы функцияны M нүктесінің функциясы деп қарастыруға болады. Ол $z = f(M)$ деп жазылады. Бұл жағдайда анықталу облысы xOy координалар жазықтықтығының кейбір нүктелер жиыны болады.

D жиынында анықталған екі айнымалы $z=f(x;y)$ функциясының *графигі* деп $(x,y)\subset D$, $z=f(x,y)$ болатындай үш өлшемді кеңістіктің (x,y,z) нүктелерінің жиыны аталады. Екі айнымалы функция $z=f(x;y)$ графигі үш өлшемді кеңістікте кейбір бет болады.[3]

Анықтама. Функция мәні әрқашан тұрақты C болатындай жазықтықтағы нүктелер жиыны екі айнымалы $z=f(x;y)$ функцияның ***деңгей сызығы*** деп аталады. Мұнда C саны *деңгей* деп аталады.

Әр нүктесінде өндірістің әртүрлі факторлары бірдей мөлшерде өндірілген өнім беретін сызық *изокванта* немесе *өндірістің селқостық сызығы* деп аталады.

Бірнеше айнымалы функциялардың туындылары және дифференциалдары

Бір айнымалы функция үшін анықталған математикалық талдау ұғымдарының көп бөлігі екі айнымалы функцияға да қолданылады.

Екі айнымалы $z=f(x,y)$ функциясы берілсін. Енді x аргументіне Δx, ал y аргументіне Δy өсімшесін берелік. Сонда z функциясының өскен мәні $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ болады. $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$ шамасы функцияның (x,y) нүктесіндегі ***толық өсімшесі*** деп аталады. Егер тек қана x аргументіне немесе тек қана y аргументіне өсімше берсек, онда алынған функцияның сәйкес өсімшелері $\Delta_x z=f(x+\Delta x, y)-f(x,y)$ және $\Delta_y z=f(x, y+\Delta y)-f(x,y)$ ***дербес өсімшелер*** деп аталады. Бірнеше айнымалы функцияның дербес өсімшелері де осылайша анықталады.

Анықтама. Бірнеше айнымалы функцияның осы айнымалылардың біреуі бойынша алынған ***дербес туындысы*** деп функцияның сәйкес дербес өсімшесінің қарастырылған тәуелсіз айнымалы өсімшесіне қатынасының соңғысы нольге ұмтылғандағы шегі аталады.

$z=f(x,y)$ функциясының тәуелсіз x айнымалысы бойынша ***дербес туындысы*** деп y тұрақты деп есептеп табылған ақырлы шек $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$ аталады.

$z=f(x,y)$ функциясының тәуелсіз y айнымалысы бойынша ***дербес туындысы*** деп x тұрақты деп есептеп табылған ақырлы шек $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$ аталады.

$z'_x(x,y)$ туындысын есептеу үшін y айнымалысын, ал $z'_y(x,y)$ туындысын табу үшін x айнымалысын тұрақты деп есептеп және дифференциалдау ережелерін пайдалану қажет.

$Q = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ өндірістік функциясының $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$ дербес туындысы *i*- ші ресурсты бір бірлікке арттырғанда алынған қосымша өнім мөлшеріне тең.

Экономикалық зерттеулерде *i*- ші ресурсты бір бірлікке арттырғанда алынған қосымша өнім мөлшері *шектік еңбек өнімділігі* немесе *шектік өнім* деп аталады.

$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ бірнеше айнымалы функциясының x_i айнымалыға қарағанда *икемділігі* деп осы функцияның басқа аргументтері тұрақты болғанда тек x_i айнымалысына қарағандағы икемділігі аталады және мына формуламен есептеледі: $E_{x_i}(y) = \frac{x_i}{y} y'_{x_i}$.

$E_{x_i}(y)$ икемділігінің мәні x_i айнымалысын 1% арттырғанда y функциясының мәні жуықтап алғанда қанша пайыз өзгеретінін көрсетеді.

Тауарға сұраныс көп фактордан тәуелді. Кейбір X тауарына сұраныс Q осы тауар бағасынан P_x, тұтынушы табысынан I және альтернативті $У$ тауарының бағасынан P_y тәуелді болсын. Сонда сұраныс үш айнымалы функция $Q = f(P_x, P_y, I)$ болады. Бағалар мен табыс өзгергенде сұраныс қалай өзгереді? Осы сұраққа икемділік ұғымы көмегімен жауап беріледі.

Ең көп тараған өндірістік функция Кобба-Дугластың дәрежелік функциясы $Q = AK^{\alpha} L^{\beta}$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta \le 1)$, мұнда α және β өнім шығарудың капитал K және еңбек L шығынына қарағанда икемділігін көрсетеді. α параметрі капитал 1% артқанда өнім шығару көлемі өзгерісін, ал β - еңбек шығыны 1% артқанда өнім шығару көлемі өзгерісін сипаттайды.

Дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ нүктесіндегі толық өсімшесін мына түрде беруге болады: $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$, мұнда $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ ұмтылғанда α мен β шексіз аз функциялар.

Дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ нүктесіндегі ***толық дифференциалы*** dz деп осы функцияның толық өсімшесінің Δx пен Δy -ке қарағанда сызықтық бас бөлігі аталады, яғни $dz = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$. Сонымен екі айнымалы функцияның толық дифференциалы осы функцияның дербес туындылары мен сәйкес тәуелсіз айнымалылардың өсімшелерінің көбейтінділерінің қосындысына тең.

Аргумент өсімшелері Δx пен Δy олардың сәйкес дифференциалдарына тең $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ болғандықтан функцияның толық дифференциалын мына түрде жазуға болады: $dz = f_x'(x_0, y_0)dx + f_y'(x_0, y_0)dy$.

Екі айнымалы функцияның дифференциалын пайдаланып $F(x,y)=0$ теңдеуімен айқындалмаған түрде берілген $y = f(x)$ функциясының туындысын табатын формуланы алуға болады, мұнда $F(x,y)$ – екі айнымалы функция.

Егер функция тұрақты (дербес жағдайда нольге тең) болса, онда оның өсімшесі және дифференциалы нольге тең $dF(x, y) = 0$. Сондықтан

$F_x'(x,y)dx + F_y'(x,y)dy = 0$, бұдан *айқындалмаған функция туындысының* формуласы шығады: $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$.

Δx және Δy шексіз аз шамалар болғандықтан функцияның толық өсімшесі жуықтап алғанда оның толық дифференциалына тең $\Delta z \approx dz$, яғни $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0)$. Бұдан екі айнымалы функцияның мәнін жуықтап есептеу формуласы шығады:

$$f(x,y) = f(x_{0,}y_0) + f_x'(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0,y_0)(y - y_0)$$

$z = f(x,y)$ функциясы $M(x,y)$ нүктесінің кейбір аймағында анықталсын, ал $M(x,y)$ нүктесі арқылы өтетін *l* түзуінің бағытын анықтайтын бірлік вектор $\bar{e} = (\cos\alpha,\ \cos\beta)$ болсын. *l* түзуінде $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нүктесін аламыз. *l* бағыты бойынша M нүктесінен M_1 нүктесіне орын алмастырғанда *z* функциясы *z* функциясының берілген *l* бағыты бойынша өсімшесі деп аталатын $\Delta_l z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$ өсімшесін алады.

Анықтама. Екі айнымалы $z = f(x,y)$ функциясының *l* бағыты бойынша туындысы z_l' деп функцияның осы бағыттағы өсімшесінің Δl орын алмасу шамасына қатынасының соңғысы нольге ұмтылғандағы шегі аталады, яғни $z_l' = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}$.

z_l' туындысы *l* бағытындағы функция өзгерісінің жылдамдығын сипаттайды. Бағыт бойынша туынды $z_l' = z_x' \cdot \cos\alpha + z_y' \cos\beta$ формуласымен есептеледі, мұнда $\cos\alpha$ және $\cos\beta$ бірлік $\bar{e}$ векторының бағыттаушы косинустары.

Анықтама. $z = f(x,y)$ функциясының градиенті *grad* z деп координаталары (z_x', z_y') болатын вектор аталады.

Градиент дегеніміз $z = f(x,y)$ функциясының ең тез өсу бағытын көрсететін вектор.

$z = f(x,y)$ функциясының $M(x,y)$ нүктесінде және $M(x,y)$ нүктесінің аймағындағы нүктелерде бірінші ретті дербес туындылары $\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}$, $\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}$.

Сонда $\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}$ және $\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}$ дербес туындыларының дербес туындылары $z = f(x,y)$ функциясының $M(x,y)$ нүктесіндегі *екінші ретті дербес туындылары* деп аталады. Екінші ретті дербес туындылар былай белгіленеді:

$$f_{xx}'(M) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad f_{xy}''(M) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);$$

$$f''_{yx}(M)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);\quad f''_{yy}(M)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Үшінші және одан да жоғары ретті дербес туындылар осылайша анықталады және белгіленеді, мысалы:

$$f'''_{xxx}(M)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right);$$

$$f'''_{xxy}(M)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right);$$

$$f'''_{yyy}(M)=\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Егер екінші ретті аралас туындылар үзіліссіз болса, онда олардың мәні дифференциалдау ретінен тәуелсіз болады, яғни $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. Бұл жоғары ретті дербес туындыларға да қолданылады.

Тиімділіктің классикалық әдістері

$M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің аймағы деп центрі M_0 нүктесінде жататын радиусы кез келген болатын дөңгелек аталады. $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің ε -аймағы деп радиусы ε болатын дөңгелек аталады.

Анықтама. Егер $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің кейбір аймағында $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ ($f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$). теңсіздігі орындалса, онда $f(x_0,y_0)$ мәні $z=f(x,y)$ функциясының *максимумы* (*минимумы*) деп аталады.

Мұнда $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі функцияның *максимумы* (*минимумы*) нүктесі деп аталады. Функцияның максимум және минимум мәндері функцияның ***экстремумдары*** деп аталады.

Теорема. (*экстремумның қажетті шарты*). Егер дифференциалданатын $z=f(x,y)$ функциясының $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде экстремумы бар болса, онда оның бірінші ретті дербес туындылары бұл нүктеде нольге тең болады: $f'_x(x_0,y_0)=0$; $f'_y(x_0,y_0)=0$.

Бірінші ретті дербес туындылары нольге тең (немесе болмайтын) нүктелер *кризистік* немесе *стационар* нүктелер деп аталады. Оларды экстремумге зерттеу екі айнымалы функцияның экстремумы болудың жеткілікті шарттары көмегімен жүргізіледі.

Теорема. (*экстремумның жеткілікті шарты*). $z=f(x,y)$ функциясы:

а) $f_x'(x_0,y_0)=0$ және $f_y'(x_0,y_0)=0$ болатындай $M_0(x_0,y_0)$ кризистік нүктесінің кейбір аймағында анықталсын;

б) бұл нүктеде оның екінші ретті үзіліссіз туындылары $f''_{xx}(x_0,y_0)=A$; $f'_x{}'_y(x_0,y_0)=B$; $f'_y{}'_y(x_0,y_0)=C$ болсын. Сонда, егер $\Delta=AC-B^2>0$ болса, онда $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде $z=f(x,y)$ функциясының экстремумы болады, әрі A<0

(A>0) болса максимум (минимум). $\Delta = AC - B^2 < 0$ болса, онда $z = f(x,y)$ функциясының экстремумы жоқ. Егер $\Delta = AC - B^2 = 0$ болса, онда экстемум болуы туралы сұрақ ашық қалады.

$\Delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$ саны Гессе анықтауышы деп аталады.

Екі айнымалы функцияны экстремумге зерттеу жобасы:

1. бірінші ретті дербес туындыларды $f_x'(x,y)$ және $f_y'(x,y)$ тап;
2. $f_x'(x,y) = 0$, $f_y'(x,y) = 0$ теңдеулерінің жүйесін шешіп функцияның кризистік нүктелерін тап;
3. екінші ретті дербес туындыларды тап, әр кризистік нүктеде олардың мәнін есепте және жеткілікті шарт көмегімен экстремум болуы туралы қорытынды шығар;
4. функцияның экстремумдарын тап.

Мөлшерлері x және y болатын екі түрлі тауар өндірілсін және олар сәйкес P_x және P_y бағалары бойынша өткізілсін. Бұл тауарларды өндіруге кеткен шығын $C=C(x,y)$ функциясымен берілсін. Сонда олардан түскен пайда функциясы мына түрде болады: $П = P_x x + P_y y - C(x,y)$ (1). Пайданың максимумы шартынан өндірістің тиімді деңгейін табамыз.

Мысал. Екі түрлі тауар өндірілсін, олардың сәйкес мөлшерлерін x және y деп белгілейік. P_1 =8 және P_2 =10 осы тауарлардың сәйкес бағалары, ал $C = x^2 + xy + y^2$ – шығын функциясы болсын. Сонда (1) теңдеу бойынша пайда екі айнымалы функция болады:

$П(x,y)=8x+10y-x^2-xy-y^2$. Экстремумның қажетті шарты $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$ сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесіне келтіреді, оның шешімі (2,4) нүктесі болады. $П'_{xx} = -2 < 0$, $\Delta = П'_{xx} \cdot П'_{yy} - (П'_{xy})^2 > 0$ болғандықтан, табылған нүкте пайда функциясының локальды максимумын анықтайды, ол $П_{max}$ =28 тең.

1.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. n айнымалы функция анықтамасын бер.
2. Екі айнымалы функция анықтамасын бер.
3. Екі айнымалы функцияның анықталу облысы деп не аталады?
4. n айнымалы сызықтық функция қандай түрде болады?
5. Қандай функция өндірістік деп аталады?
6. Кобба-Дуглас функциясы қандай шарттарды қанағаттандыруы қажет?
7. Екі айнымалы функцияның графигі деп не аталады?
8. Екі айнымалы функцияның графигі не болады?
9. Деңгей сызығы деп не аталады?
10. Өндірістік функцияның деңгей сызығы қалай аталады?
11. Екі айнымалы функцияның дербес және толық өсімшесі деп не аталады?

12. Екі айнымалы функцияның бірінші ретті дербес туындыларының анықтамасын бер.
13. n айнымалы функцияның бірінші ретті дербес туындыларының анықтамасын бер.
14. Дербес туындының физикалық мағынасы қандай?
15. Бірнеше айнымалы функцияның икемділігі деп не аталады?
16. Тура және қима икемділік ұғымдары қандай жағдайларда қолданылады?
17. Қандай тауарлар өзара ауыстырымды және өзара толықтырымды деп аталады?
18. Кобба-Дуглас функциясындағы α және β параметрлері икемділікпен қалай байланысты және олардың мағынасы қандай?
19. Екі айнымалы функцияның толық дифференциалы деп не аталады?
20. Айқындалмаған функция туындысы қандай формуламен есептеледі?
21. Екі айнымалы функцияның бағыт бойынша туындысының анықтамасын бер.
22. Екі айнымалы функцияның градиенті деп не аталады?
23. Екінші және одан жоғары ретті дербес туындылар қалай анықталады?
24. 24. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің аймағы дегеніміз не?
25. Екі айнымалы функцияның экстремумы дегеніміз не?
26. Қандай нүктелер экстремальды нүктелер деп аталады?
27. Екі айнымалы функция экстремумының қажетті шартын тұжырымда.
28. Қандай нүктелер кризистік немесе стационар деп аталады?
29. Кризистік және экстремальды нүктелер арасындағы байланыс қандай?
30. Гессе анықтауышы деп не аталады?
31. Екі айнымалы функция экстремумының жеткілікті шартын тұжырымда.

1.3 Есептер шығару

1 **Функцияның анықталу облысын табыңыз**

1.1 $z = (x^3 + 2y)\cdot[\ln(-x) + \sqrt{y}\,]$ **1.2** $z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2} + \cos x^2 e^{y-x}$

1.3 $z = \cos(y - x^2)\ln(y - x)$ **1.4** $z = \cos(x^2 - y^2)\cdot\ln(x^2 + y^2)$

1.5 $z = \sqrt{x^2 + y^2}\sin xy$ **1.6** $z = \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^3}\right)\cdot\sin(x^2 - y^2)$

1.7 $z = \dfrac{\cos(x+y)}{x-y} + 3x^2 + 7y^2$ **1.8** $z = (x^2 + y^2)\cdot e^{\frac{x}{y+1}}\cdot\sqrt{y}$

1.9 $z = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} - 2xy$ **1.10** $z = \dfrac{x\cdot y}{x^2 - y^2}$

1.11 $z = \ln(y - x^2) + e^{x/y}$

2 **$Q = Q_0$ шығарылым көлеміне сәйкес $Q = f(x;y)$ өндірістік функциясының деңгей сызығын табыңыз**

2.1 $Q = \sqrt{19 + 5x^2y} - 5$, $Q = 2$ **2.4** $Q = \sqrt{49 + 2x^4y^2} - 5$, $Q = 6$

2.2 $Q = \sqrt{1 + 2x^6y^2} - 1$, $Q = 2$ **2.5** $Q = \sqrt{54 + x^6y^3} - 6$, $Q = 3$

2.3 $Q = \sqrt{16 + 6x^3y^3} - 2$, $Q = 6$ **2.6** $Q = \sqrt{62 + 2x^3y} - 5$, $Q = 3$

3 ***A*(*x*₀;*y*₀) нүктесінде *z = f (x;y)* функциясы үшін:**
1) х айнымалысына қатысты дербес туындыны есептеңіз;
2) у айнымалысына қатысты дербес туындыны есептеңіз.

3.1 $z = -3x^3y^4 + \frac{x^5}{y^3} - 3x - 2y + 9$, $A(1;-1)$

3.2 $z = -2x^4y^3 - \frac{x^4}{y^4} - x - 3y + 4$, $A(1;\ 1)$

3.3 $z = 4x^2y^4 + 4\frac{x^5}{y^2} + 4x + 3y + 5$, $A(-1;\ 1)$

3.4 $z = -x^4y^4 + \frac{x^5}{y^4} + 4x + 2y + 9$, $A(-1;-1)$

3.5 $z = -3x^2y^4 + 2\frac{x^5}{y^2} + 3x + y + 1$, $A(1;\ 1)$

3.6 $z = 3x^2y^2 + 2\frac{x^3}{y^2} - 2x + 4y + 3$, $A(2;\ 2)$

4 ***A*(*x*₀;*y*₀) нүктесінде *z = f (x;y)* функциясы үшін:**
1) х айнымалысына қатысты дербес туындыны есептеңіз;
2) у айнымалысына қатысты дербес туындыны есептеңіз.

4.1 $z = 3x^6y^8\sqrt{x} - x^3y^7 + \frac{y^3}{x^2\sqrt{x}} + \frac{2x^4}{y^3}$, $A(1;-1)$

4.2 $z = 2x^7y^9\sqrt{x} - 2x^3y^8 + \frac{2x^3}{y^2}$, $A(1\ -1)$

4.3 $z = -2x^4y^6\sqrt{x} + x^3y^5 - \frac{2x^5}{y^4}$, $A(1;-1)$

4.4 $z = 3x^3y^7 + 2y/\sqrt{x}$, $A(1;-1)$

4.5 $z = -2x^6y^8\sqrt{x} + x^2y^7 - \frac{2y}{\sqrt{x}} - \frac{x^4}{y^3}$, $A(1;-1)$

5 ***A*(*x*₀;*y*₀) нүктесінде *z = f (x;y)* функциясы үшін:**
1) х айнымалысына қатысты дербес туындыны есептеңіз;
2) у айнымалысына қатысты дербес туындыны есептеңіз.

5.1 $z = \frac{3x^2y}{y - x^2}$, $A(2;\ 2)$ **5.2** $z = \frac{2xy}{2x^2 - y^2}$, $A(1;\ 1)$

5.3 $z = \frac{x^2y^3}{3x - y}$, $A(1;\ 2)$ **5.4** $z = \frac{2xy}{2x + 3y}$, $A(-1;\ 1)$

5.5 $z = \frac{xy^3}{y - 2x^2}$, $A(1;\ 1)$ **5.6** $z = \frac{xy^2}{x - y^2}$, $A(2;\ 2)$

6 **$A(x_0;y_0)$ нүктесінде $z = f(x;y)$ функциясы үшін:**
1) х айнымалысы бойынша дербес туындыны есептеңіз;
2) у айнымалысы бойынша дербес туындыны есептеңіз.

6.1 $z = (xy - y)(5 \sin x - \cos x)$, $A(0;-1)$

6.2 $z = (2y + xy)(2 \cos x + \sin x)$, $A(0; 1)$

6.3 $z = (3y + xy)(2 \sin x - 3 \cos x)$, $A(0;-3)$

6.4 $z = (y + xy)(5 \sin x - 2 \cos x)$, $A(0; 1)$

6.5 $z = (y + xy)(5 \sin x - 2 \cos x)$, $A(0;-1)$

7 **$A(x_0;y_0)$ нүктесінде $z = f(x;y)$ функциясы үшін:**
1) х айнымалысы бойынша дербес туындыны есептеңіз;
2) у айнымалысы бойынша дербес туындыны есептеңіз.

7.1 $z = e^{2x^3y^2 - 2x + 2y + 10}$, $A(-1;-2)$

7.2 z = tg (–x5y2 + y + 6), A(1;-2)

7.3 $z = \sin(-x^3y^3 + 3x + 2)$, $A(2; 1)$

7.4 $z = (-x^3y^4 + 2y - 2)^2$, $A(1; 1)$

7.5 $z = \mathrm{tg}(x^5y^2 - x - 2y + 7)$, $A(-1; 2)$

7.6 $z = (x^3y^4 - x + 1)^2$, $A(1;-1)$

7.7 $z = (2x^2y^2 - 2y - 5)^2$, $A(-1;-1)$

7.8 $z = (x^4y^2 - 2x - 2y)^4$, $A(1;-1)$

7.9 $z = (x^3y^2 + 3x - 5)^3$, $A(1; 1)$

7.10 $z = (x^4y^3 + 2x + 2y)^4$, $A(1;-1)$

8 **$A(x_0;y_0)$ нүктесінде z = f (x;y) функциясының толық дифференциалын есептеңіз, мұнда Δx және Δy белгілі**

8.1 $z = (7y + x^6)(7 \ln x + e^y)$, $A(1;0)$, $\Delta x = -0.3$, $\Delta y = -0.3$

8.2 $z = (5e^y - 2 \ln x)(6y + x^3)$, $A(1;0)$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = -0.2$

8.3 $z = (3y + 6x^2)(\ln x - e^y)$, $A(1;0)$, $\Delta x = -0.3$, $\Delta y = -0.4$

8.4 $z = (3y - 6x^2)(\ln x - 2e^y)$, $A(1;0)$, $\Delta x = -0.2$, $\Delta y = 0.4$

8.5 $z = (x^6 - 3y)(-3 \ln x - e^y)$, $A(1;0)$, $\Delta x = -0.2$, $\Delta y = -0.1$

9 **Толық дифференциал арқылы, х аргументі Δx азайған және у аргументі Δy артқан кезде z = f (x;y) функциясының мәні $A(x_0;y_0)$ нүктесінде шамамен қалай өзгеретінін анықтаңыз**

9.1 $z = \sin(11 - 3x - 2y^3)$ нүктесінде $A(3; 1)$, x 0.1-ге, y 0.2-ге

9.2 $z = \mathrm{tg}(y^3 - 4x - 13)$ нүктесінде $A(-3;-1)$, x 0.3-ке, y 0.3-ке

9.3 $z = \ln(y^4 - 3x + 5)$ нүктесінде $A(1;-1)$, x 0.1-ге, y 0.3-ке

Функцияның мәні шамамен қанша өзгереді?

9.4 $z = 2e^{x^2 + y\ -5}$ x=2 0,2-ге өскенде және y =1 0,2-ге кемігенде

9.5 $z = 4\sin(3x - y)$ x=1 0,05-ге кемігенде және y =3 на 0,1-ге өскенде

9.6 $z = \ln(7x + y + 17)$ x= -3 0,6 -ге өскенде және y =5 на 0,2-ге кемігенде

9.7 $z = 2\sqrt{2x-3} \cdot e^{5y}$ x=2 0,5-ге өскенде және y =0 на 0,1-ге өскенде

10 **Толық дифференциалды пайдаланып, z = f (x; y) функциясының $A(x_1;y_1)$ нүктесіндегі мәнін шамамен табыңыз.**

10.1 $z = x + e^{x^2 + 4y - 33}$ A (0.8; 8.3) нүктесінде

10.2 $z = x + e^{2x + y^2 - 13}$ A (6.1; 0.7) нүктесінде

10.3 $z = x + e^{x^3 - 3y + 8}$ A (0.9; 2.7) нүктесінде

10.4 $z = 4\sqrt{x + 2y}$ x=2,2 нүктесінде және y=1,3

10.4 $z = e^{x + y^2 - 5}$ x=0,9 нүктесінде және y=2,1

10.6 $z = e^{3x}\sqrt{2y + 1}$ x=0, 1 нүктесінде және y=4,3

10.7 $z = 2\ln(4y - x)$ x=2,9 нүктесінде және y=1,2

11 **$A(x_o;y_o)$ нүктесінде z = f (x;y) функциясының толық дифференциалын есептеңіз**

11.1 $z = x^3y^2$, A (2; 1) **11.2** $z = x^3y + xy^2$, A (1; 2)

11.3 $z = x^3 + x^2y^2$, A (–1; 1) **11.3** $z = 2x^4 - 3xy^3$, A (–1; 1)

11.4 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, A (1;2) егер $\Delta x = -2$, $\Delta y = 2\ 5$

11.5 $z = 1 + \frac{2x}{y}$, A (2; 1) егер $\Delta x = 6$, $\Delta y = 2$

12.1 $-y - 6(x+1)y^3 - 6x^2 + 7 = 0$, $x = -1$, $\Delta x = 0.4$

12.2 $7y + 5(x-2)y^4 - 8x^2 + 8x + 2 = 0$, $x = 2$, $\Delta x = 0.1$

12.3 $2y + 7(e-1)y + 8x + 8x - 16 =$ 0, $x = 0$, $\Delta x = 0.1$

12.4 $-y + (6 - 6x)y - x^2 + 3x - 4 = 0$, $x = 1$, $\Delta x = 0.3$

12.5 $-2y^5 + 6y\sin x + 4x^2 + 4x + 2 = 0$, $x = 0$, $\Delta x = 0.2$

13 **$x = x_o$ нүктесінде, айқын емес түрде берілген $F(x;y) = 0$ теңдеуінің функциясының $y = y(x)$ туындысын табу керек, және x Δx %-ға артқанда, у-тің мәні шамамен қанша пайызға өзгеретінін анықтау қажет.**

13.1 $2y + 3(x-1)^3\sin(8y + 3) - 2x^2 =$ 0, $x = 1$, $\Delta x = 0.5$ %

13.2 $6y - 8(x-2)^3\ln(4y + 15) - 2x^2 + 2x$ $- 8 = 0$, $x = 2$, $\Delta x = 0.4$ %

13.3	$2y + 7(x + 1)^3 \ln(3y + 14) - 6x^2 + 2 = 0,$	$x = -1$, $\Delta x = 0.1\%$
13.4	$6y + 2(x - 1)^5 e^{8y} - 6x^2 = 0,$	$x = 1$, $\Delta x = 0.4\ \%$
13.5	$3y + 4(x - 1)^3 \operatorname{tg}(3y + 2) + 3x^2 - 9x + 9 = 0,$	$x = 1$, $\Delta x = 0.5\ \%$

14 **Δx және Δy берілген кездегі $z = f(x; y)$ функциясының $A(x_o; y_o)$ нүктесіндегі екінші ретті дифференциалын есептеңдер.**

14.1	$z = \cos(7x - 2y + 12)$,	$A(-2; -1)$,	егер $\Delta x = -0.4$, $\Delta y = 0.1$
14.2	$z = \cos(6 - 2x - 6y)$,	$A(-3; 2)$,	егер $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.3$
14.3	$z = \cos(10 - 3x - 4y)$,	$A(2; 1)$,	егер $\Delta x = -0.2$, $\Delta y = 0.4$
14.4	$z = \cos(3xy + 24)$,	$A(4; -2)$,	егер $\Delta x = -0.3$, $\Delta y = 0.1$
14.5	$z = \cos(-2xy - 12)$,	$A(-3; 2)$,	егер $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.4$
14.6	$z = \cos(-4xy - 12)$,	$A(-3; 1)$,	егер $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = 0.4$

15 **$z = f(x; y)$ функцияны экстремумға зерттеу**

15.1 $z = -3x^2 - 5y^2 - 4xy + 14x + 2y$

15.2 $z = 3x^2 + 8y^2 - 4xy - 14x - 4y$

15.3 $z = x^2 - 5y^2 - 2xy + 8x + 28y$

15.4 $z = -4x^2 - y^2 - 2xy + 18x + 6y$

15.5 $z = 7x^2 - 3y^2 - 8xy - 34x + 30y$

15.6 $z = 3xy - x^3 - y^3$

16 **$z = f(x; y)$ функцияны экстремумға зерттеу**

16.1 $z = x^3 - 3x^2 - 4y^2 - 9x - 8y$

16.2 $z = x^3 - 9x^2 - y^2 + 15x - 2y$

16.3 $z = 3x^3 - 18x^2 + y^2 + 27x + 6y$

16.4 $z = 3x^3 - 27x^2 + 5y^2 + 72x + 20y - 14$

16.5 $z = -2x^3 + 6x^2 + 4y^2 + 18x + 24y + 41$

14-тақырып. Туындының экономикалық талдауда қолданылуы

Дәріс мақсаты: Студенттерді дифференциалдық есептеулер әдісімен экономикалық заңдылықтарды зерттеу мысалдарымен таныстыру.

Дәріс жоспары:

1. Өндірістің кемімелі тиімділігі заңы.
2. Кемімелі пайдалылық заңы.

3. Өндірістің тиімділік деңгейі туралы заң.

1.1 Негізгі теориялық мәлімет

Өндірістің кемімелі тиімділік заңы былай тұжырымдалады: *өндірісті кеңейткенде қосымша пайдаланылған ресурстың әр бірлігінен алынатын қосымша өнім бір сәттен соң кемиді*.

$Q=f(x)$ – өндірістік функция болсын, мұнда Q – өнім шығару көлемі, x – пайдаланылған ресурс мөлшері.

Сонда $MQ(x)=f'(x)$ - пайдаланылған ресурстың шектік өнімі, ол жуықтап алғанда қосымша пайдаланылған ресурс бірлігінен алынған қосымша өнімге ΔQ тең, яғни $\Delta x=1$ болғанда $MQ(x) \approx \Delta Q$.

Бұл заң бойынша барлық $x \geq x_0$ үшін $MQ(x)$ – кемімелі функция. Сонда $x \geq x_0$ болғанда $MQ'(x) \leq 0$. Ендеше $x \geq x_0$ болғанда $MQ'(x) = f''(x) \leq 0$ болғандықтан $f(x)$ – дөңес. Егер $Q'' = f''(x) \leq 0$ болса, онда өндірістің тиімділігі кемиді.

Кемімелі пайдалылық заңы былай тұжырымдалады: *алынатын тауардың мөлшері артқан сайын әр қосымша жаңа тауар бірлігінен алынатын қосымша пайдалылық кейбір сәттен соң кемиді.*

$U=U(x)$ –тұтынушының пайдалылық деңгейінің U алынатын тауар мөлшеріне x тәуелділігін өрнектейтін пайдалылық функциясы болсын.

Сонда шектік пайдалылық $MU(x)=U'(x)$ жуықтап алғанда, қосымша алынған тауар бірлігінен тұтынушының қосымша алған пайдалылығына ΔU тең: $\Delta x=1$ болғанда $MU(x)=U'(x) \approx \Delta U$.

Сонда кемімелі пайдалылық заңы бойынша шектік пайдалылық кемімелі функция, ендеше кез келген $x \geq x_0$ үшін $MU'(x) = U''(x) \leq 0$. Онда кез келген $x \geq x_0$ үшін $U(x)$ – дөңес.

Анықтама. Пайда ең көп алынатын өнім көлемі *өндірістің тиімді деңгейі* деп аталады.

Бір немесе бірнеше ресурс пайдаланып фирма Q, мөлшерде бір түрлі өнім шығарсын.

Анықтама. Пайдаланылған барлық ресурстың қосынды құны *C(Q)* өндірістің *жалпы шығыны* деп аталады.

Анықтама. Өндірілген өнімді нарық бағасы *P* бойынша өткізуден фирманың алатын сомасы *R* фирманың *жалпы табысы* деп аталады:

$R=R(Q)$ – жалпы табыс функциясы.

$R=PQ$ болған жағдайда. Онда фирманың *пайдасы $\Pi(Q)=R(Q)-C(Q)$.* Туынды көмегімен пайда функциясын максимумге зерттейміз:

$$\Pi'(x) = R'(Q) - C'(Q) = MR(Q) - MC(Q).$$

Егер $MR>MC$ болса, онда қосымша табыс қосымша шығыннан артық, сондықтан өнім шығаруды арттырған жөн.

Егер кез келген $Q>0$ үшін $MR>MC$ болса, онда $\Pi'(Q)>0$. Ендеше кез келген $Q>0$ үшін $\Pi(Q)$- өспелі функция.

Егер кез келген $Q > 0$ үшін *MR<MC* болса, онда $\Pi'(Q) < 0$. Ендеше кез келген $Q > 0$ үшін *П(Q)*- кемімелі функция, сондықтан өнім шығаруды кеміткен жөн.
Q=Q₀>0 өнім шығару көлемінде пайда максимумге жетсін, яғни Q_0 *өнім шығарудың тиімді көлемі (өндірістің тиімді деңгейі).*
Егер фирма өнім шығарудың тиімді көлемін шығарса, яғни пайдасын максимумге жеткізсе, онда фирма *тепе-теңдік күйде* деп аталады.
Q_0 *–П(Q)* функциясының максимум нүктесі, сондықтан ол кризистік болады. Ендеше $\Pi'(Q) = 0$. $MR(Q_0)$ - $MC(Q_0)$ = 0. Бұдан $MR(Q_0) = MC(Q_0)$ (1). (1) теңдік *өндірістің тиімді деңгейі туралы заңды* өрнектейді.
Екі жағдайды қарастыралық:
1)Өндіруші фирма монополия болсын. Бұл жағдайда баға мен фирманың өнім шығару көлемінің байланысы сұраныс функциясына сәйкес анықталады: $Q = D(x) \Rightarrow P = D^{-1}(Q)$ - сұраныс бағасының функциясы. Сонда фирма табысы $R(Q) = D^{-1}(Q) \cdot Q$. Бұл жағдайда өнім шығарудың тиімді көлемін анықтау үшін мына шарттарды қолдану қажет:

$$MR(Q_0) = MC(Q_0) \ (2) \ MC'(Q_0) > MR'(Q_0) \ (3).$$

2)фирма бақталастық жағдайда болсын (мүлдем бақталастық). Бұл жағдайда фирма өнімінің бағасын фирма анықтайды және ол тұрақты болады *P – const.* Сонда $R(Q)=PQ$, $MR(Q)=P$, $MR'(Q_0)=0$.

$$(2) \Rightarrow MR(Q)=P$$
$$(3) \Rightarrow M_{C'(Q_0)} > 0$$

Бұл бақталастық фирманың тепе-теңдік шарты.

1.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Қандай функция өндірістік деп аталады?
2. Пайдалылық функциясының мағынасы қандай?
3. Өндірістің тиімді деңгейі деп не аталады?
4. Өндірістің кемімелі тиімділік заңынан өндірістік функцияның қандай сипаттамасы шығады?
5. Кемімелі пайдалылық заңы мен функция графигінің формасы қалай байланысты?
6. Өндірістің жалпы шығыны функциясы қалай анықталады?
7. Фирманың жалпы табысы деп не аталады?
8. Фирманың пайдасы қалай анықталады?
9. Фирманың тепе-теңдік күйін қалай түсінесіңдер?
10. Өндірістің тиімді деңгейі шартының қажетті және жеткілікті шарттары қандай?

1.3 Есептер шығару

1 **Өндірілген өнім бірлігінің бағасы *P=P₀* ақша бірлігі болсын, ал фирманың жалпы шығындар функциясы *C=C(Q).* Өнімнің оңтайлы көлемін және кәсіпорынның максималды пайдасын табыңыз**

1.1	$P=24$, $C(Q)=3Q^2+1$	**1.2**	$P=8$, $C(Q)=Q^3-3Q^2+4Q+1$
1.3	$P=20$, $C(Q)=5Q^2+3$	***1.4***	$P=20$, $C(Q)=Q^3-3Q^2+11Q+11$
1.5	$P=8$, $C(Q)=2Q^2+5$	**1.6**	$P=6$, $C(Q)=\frac{1}{3}Q^3-Q^2+3Q+2$
1.7	$P=6$, $C(Q)=Q^2+7$	**1.8**	$P=7$, $C(Q)=Q^3-3Q^2+7Q+1$
1.9	$P=18$, $C(Q)=3Q^2+5$	**1.10**	$P=9$, $C(Q)=Q^3-7{,}5Q^2+21Q$

2 ***Q = f (x)* фирманың өндірістік функциясы болсын. Кәсіпорын өнімдерінің бағасы *P = P₀* ақша бірлігі, ал пайдаланылған ресурс бірлігінің бағасы *r = r₀* ақша бірлігі болса, компанияның максималды пайдасын табыңыз.**

2.1	$Q=3\sqrt{x}$,	P = 4,	r =2
2.2	$Q=4\sqrt{x}$,	P = 6,	r =3
2.3	$Q(x)=\sqrt{4x+1}-1$	P = 5,	r =2
2.4	$Q(x)=\sqrt{3x-2}$	P = 10,	r =3
2.5	$Q(x)=\frac{16x}{x+1}$	P = 4,	r =1
2.6	$Q(x)=x(10-x),\ 0\le x\le 5$	P = 2,	r =4
2.7	$Q(x)=\frac{2x}{x+2}$	P = 16,	r =4
2.8	$Q(x)=3x(14-x),\ 0\le x\le 7$	P = 1,	r =6

2.9 $Q=15x-x^2$ **фирманың өндірістік функциясы болсын, мұндағы x – пайдаланылған ресурс саны және фирма өнімдерінің бағасы 2 ақша бірлігіне, ресурс бірлігінің бағасы 10 ақша бірлігіне тең болсын. бірлік Фирманың тепе-теңдік күйіндегі өнімін табыңыз**

2.10 $Q=8x-x^2$ **фирманың өндірістік функциясы болсын, мұнда *x* – пайдаланылған ресурс саны және фирма өнімдерінің бағасы** $P=1$**ақша бірлігіне тең болсын, ал ресурс бірлігінің бағасы** $r=4$ **ақша бірлігіне тең болсын. Тепе-теңдік кездегі фирманың шығындарын табыңыз**

3 **Бәсекелес фирма Q_1 және Q_2 мөлшерде екі түрлі тауар өндіреді және оларды P_1 және P_2 бағамен сатады. Фирманың жалпы шығын функциясы $C = C(Q_1; Q_2)$ түрінде берілген. Төмендегілерді табу қажет:**
1) өнімнің оңтайлы шығару көлемін (Q_1=?, Q_2=?),
2) фирманың тепе-теңдік жағдайындағы табысын,
3) фирманың тепе-теңдік жағдайындағы шығындарын,
4) фирманың максималды пайдасын.

3.1	$P_1 = 10$,	$P_2 = 17$,	$C = 3Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 22$
3.2	$P_1 = 14$,	$P_2 = 16$,	$C = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 18$
3.3	$P_1 = 9$,	$P_2 = 25$,	$C = 3Q_1^2 + Q_1Q_2 + 4Q_2^2 + 15$
3.4	$P_1 = 10$,	$P_2 = 16$	$C = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 19$
3.5	$P_1 = 10$,	$P_2 = 20$,	$C = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 3Q_2^2 + 21$

4 **Сұраныс функциясы *X* тауарына *Q = Q (Px; Py; I)* түрінде берілсін және *X* пен *Y* тауарларының бағалары және тұтынушының табысы *I* белгілі болсын: *Px, Py, I.* Төмендегілерді табу қажет:**
1) сұраныстың баға бойынша тікелей икемділігі;
2) сұраныстың баға бойынша қима икемділігі;
3) сұраныстың табыс бойынша икемділігі;
және анықтау қажет:
4) *X* тауарына сұраныс икемді, бейтарап, икемді емес болып табылады ма;
5) *X* және *Y* тауарлары өзара алмастырылатын, толықтыратын болып табылады ма;
6) *X* тауары сапалы, төмен сапалы болып табылады ма;
7) *X* тауарына сұраныс көлемі *X* тауарының бағасы *r %*-ға азайғанда, *Y* тауарының бағасы *s %*-ға артқанда және тұтынушының табысы *I h %-ға* азайғанда сұраныс көлемі шамамен қанша пайызға өзгереді?

4.1	$Q = 21 - 3P_xP_y + P_yI + 2P_xI^4$,	$P_x = 2$, $P_y = 4$, $I = 1$, $r = 0.2$, $s = 0.1$, $h = 0.1$
4.2	$Q = 10 + 2P_xP_y + 5P_yI - P_xI^3$,	$P_x = 5$, $P_y = 2$, $I = 2$, $r = 0.4$, $s = 0.5$, $h = 0.6$
4.3	$Q = 31 - 3P_xP_y - 3P_yI + P_xI^4$,	$P_x = 4$, $P_y = 2$, $I = 1$, $r = 0.4$, $s = 0.5$, $h = 0.6$
4.4	$Q = 2P_xP_y + 2P_yI - 3P_xI^2$,	$P_x = 5$, $P_y = 5$, $I = 2$, $r = 0.2$, $s = 0.4$, $h = 0.6$
4.5	$Q = 12 + 3P_xP_y + 2P_yI - 2P_xI^3$,	$P_x = 2$, $P_y = 4$, $I = 2$, $r = 0.5$, $s = 0.3$, $h = 0.4$

5 **Сұраныс функциясы *Q = D(P; I)* түрінде берілсін. Берілген *P* бағамен және тұтынушының *I* табысы жағдайында келесіні тап:**
1) сұраныстың баға бойынша икемділігін;
2) сұраныстың табыс бойынша икемділігін табу қажет және:

3) тауарға сұраныс икемді, бейтарап, икемсіз болып табылады ма екенін анықтау қажет;
4) тауар сапалы, төмен сапалы болып табылады ма?
5) баға *r%*-ға артқанда және табыс *h%*-ға азайғанда тауарға сұраныс көлемі шамамен қанша пайызға өзгеретінін анықтау.

5.1	$Q = (8 - 3\cdot I^5)/(2 + P^2 - 2\cdot I)$,	$P = 1$, $I = 1$, $r = 0.2$, $h = 0.2$
5.2	$Q = (6 - P + 2\cdot I^5)/(P - 5 + 3\cdot I)$,	$P = 3$, $I = 1$, $r = 0.5$, $h = 0.4$
5.3	$Q = (9 + 4P - 5\cdot I^4)/(P - 6 + 3\cdot I)$,	$P = 4$, $I = 1$, $r = 0.5$, $h = 0.4$
5.4	$Q = (1 + 2P^4)/(3\cdot I - 6 + 2P)$,	$P = 2$, $I = 1$, $r = 0.5$, $h = 0.2$
5.5	$Q = (8 + P^4)/(7 + 2P - 2\cdot I)$,	$P = 2$, $I = 5$, $r = 0.5$, $h = 0.6$

15-тақырып. Анықталмаған интеграл. Анықталған интеграл

Дәріс мақсаты: Студенттерді интегралдық есептеудің негізгі ұғымдарымен және әдістерімен таныстыру. Геометриялық және экономикалық сипатты есептерді шешкенде интегралдық есептеулер аппаратының қолдану мүмкіншіліктерін көрсету.

Қарастырылатын сұрақтар тізімі:
1. Алғашқы функция және анықталмаған интегралдың анықтамалары.
2. Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері.
3. Негізгі интегралдардың кестесі.
4. Интегралдаудың негізгі әдістері.
5. Анықталған интегралдың анықтамасы.
6. Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері.
7. Ньютон-Лейбниц формуласы.
8. Негізгі интегралдау әдістері.
9. Анықталған интегралдың геометрияда және экономикада қолданылуы.
10. Меншіксіз интегралдар.

1.1 Негізгі теориялық мәлімет

Анықтама. Егер X аралығының әрбір x нүктесінде $F'(x) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда осы аралықта $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының ***алғашқы функциясы*** деп аталады.

Алғашқы функцияның негізгі қасиеті былай тұжырымдалады: егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясына алғашқы функция болса, онда $F(x)+C$ функциясы да кез келген С үшін $f(x)$ функциясына алғашқы функция болады.

Анықтама. $f(x)$ функциясының X аралығындағы барлық алғашқы функцияларының жиынтығы $f(x)$ функциясының ***анықталмаған интегралы*** деп аталады және $\int f(x)dx$ деп белгіленеді, мұнда $\int$ -

интеграл белгісі, *f(x)*- интеграл астындағы функция, *f(x)dx*- интеграл астындағы өрнек.

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Функциядан анықталмаған интеграл табу амалы осы функцияны *интегралдау* деп аталады.

Анықталмаған интегралдың қасиеттері:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; $\int f'(x)dx = f(x)+C$; мұнда C – еркін тұрақты.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
3. $\int dF(x) = F(x)+C$
4. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx$, мұнда *C*- тұрақты шама.
5. $\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Негізгі интегралдар кестесі:

1. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1}+C, \quad (a\neq -1)$;
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C$;
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$ $(a>0,\ a\neq 1)$;
4. $\int e^x dx = e^x + C$;
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;
10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$;
11. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$ $(a\neq 0)$;
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\lambda}+C\right|$;
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$;
14. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\,arctg\dfrac{x}{a} + C$ $(a\neq 0)$.

Интегралдаудың негізгі әдістері.

Негізгі интегралдар кестесін тікелей қолданып және анықталмаған интегралдар қасиеттері көмегімен интегралдарды есептеу *тікелей интегралдау* деп аталады.

Мысалы: интегралдарды есептеу

1. $\int\left(6x^2+2\cos x-\frac{3}{x}\right)dx=6\int x^2dx+2\int\cos x\,dx-3\int\frac{dx}{x}=2x^3+2\sin x-3\ln|x|+C.$

2. $\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+C.$

$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ интегралын $\int f(\varphi(t))d\varphi(t)$ түрде жазуға болады. Мұндай түрлендіру *дифференциал таңбасы астына енгізу* арқылы интегралдау деп аталады.

Мысалы: а) $\int\cos(x^5)5x^4dx$; б) $\int\frac{2xdx}{1+x^4}$ интегралдарды есептеу

Шешімдері: а) $\int\cos(x^5)5x^4dx=\int\cos(x^5)d(x^5)=\sin(x^5)+C=\sin x^5+C$

б) $\int\frac{2xdx}{1+x^4}=\int\frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2}=arctg\,(x^2)+C=arctg\;x^2+C$

Көп жағдайларда интегралдаудың жаңа айнымалысын енгізу берілген интегралды кестедегі интегралға келтіруге мүмкіндік береді. Бұл әдіс *орнына қою* немесе *айнымалыны ауыстыру* әдісі деп аталады. $x=\varphi(t)$ болсын. Бұдан $dx=\varphi'(t)dt$. Сонда $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ (1)

Мысал. $\int\cos(x^5)5x^4dx$ интегралын есептеу:

Шешімі: $u=x^5$ ауыстыруды қолданайық. Сонда $du=5x^4dx$ болғандықтан

$$\int\cos(x^5)5x^4dx=\int\cos u\,du=\sin u+C=\sin x^5+C$$ шығады.

Мысал. $\int\frac{2xdx}{1+x^4}$ интегралын есептеу:

Шешімі: $u=x^2$ ауыстыруды қолданайық. Сонда $du=2x\,dx$ болғандықтан

$$\int\frac{2xdx}{1+x^4}=\int\frac{2xdx}{1+(x^2)^2}=\int\frac{du}{1+u^2}=arctg\;u+C=arctg\;x^2+C$$ шығады

Орнына қою әдісінен дербес жағдайда мына ереже шығады: егер $\int f(u)du=F(u)+C$ болса, онда $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Мысалы. а) $\int\frac{2xdx}{x^2+5}$; б) $\int\cos(3x-1)dx$; в) $\int\frac{dx}{7x+2}$ интегралдарын есептеу:

Шешімі: а) $\int\frac{2xdx}{x^2+5}=\ln\left|x^2+5\right|+C$; б) $\int\cos(3x-1)dx=\frac{1}{3}\sin(3x-1)+C$;

в) $\int \frac{dx}{7x+2} = \frac{1}{7}\ln|7x+2| + C$

Дифференциал таңбасының астына енгізу айнымалыны ауыстыру әдісінің бір іске асуы.

Интегралды $\int u dv = uv - \int v du$ *(2)* формуласымен табу *бөліктеп интегралдау* әдісі деп аталады, мұнда *u=u(x)*, *v=v(x)* – үзіліссіз дифференциалданатын *x* –ке тәуелді функциялар.

$P(x)$ көпмүшелік болатын $\int P(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\sin\alpha x dx$, $\int P(x)\cos\alpha x dx$ түріндегі интегралдар үшін *u* деп $P(x)$, ал dv деп сәйкес $e^{\alpha x}dx$, $\sin\alpha x dx$, $\cos\alpha x dx$ өрнектердің бірі алынады. $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$ түріндегі интегралдар үшін *u* деп сәйкес lnx, arcsinx, arccosx функцияларының бірі, ал *dv* деп $P(x)\, dx$ өрнегі алынады.

Мысал. $\int xe^x dx$ интегралын есептеу:

Шешімі: $x = u$, $e^x dx = dv$, болсын. Сонда $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$. (2)-ші формула бойынша келесі шығады:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Анықталған интеграл

$f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде анықталған және шектелген болсын және $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ нүктелері осы кесіндіні *n* элементар кесінділерге бөлсін. Әрбір $[x_{i-1}, x_i]$ элементар кесіндісінен c_i нүктесі таңдап алынсын. Сонда $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ (3) қосынды $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндідегі *интегралдық қосындысы* деп аталады.

Анықтама. (3) интегралдық қосындының $\max\limits_{1<i<n}\Delta x_i$ нольге ұмтылғандағы шегі бар, ақырлы және $x_1, x_2, ...$ нүктелері мен $c_1, c_2, ...$ нүктелерін таңдау тәсілінен тәуелсіз болсын. Сонда бұл шек $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі ***анықталған интегралы*** деп аталады және $\int_a^b f(x)dx$ деп белгіленеді, ал $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын деп аталады, яғни $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ (4).

Мұнда *a* саны интегралдаудың *төменгі шегі*, ал *b* саны *жоғары шегі* деп аталады.

Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$;
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;
4. $\int_a^b Cf(x)dx = C\cdot\int_a^b f(x)dx$, где C – тұрақты.
5. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде интегралданады және $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ *(5) – Ньютон-Лейбниц формуласы*, мұнда $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі алғашқы функциясы.

Мысал. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = (-\frac{1}{x})|_1^2 = (-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{1}) = \frac{1}{2}$

Интегралдаудың негізгі әдістері.

Теорема. Мына шарттар орындалсын:

1) $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз;
2) $[\alpha,\beta]$ кесіндісінде $x=\varphi(t)$ функциясы өзінің $\varphi'(t)$ туындысымен бірге үзіліссіз;
3) $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$;
4) $f(\varphi(t))$ функциясы $[\alpha,\beta]$ кесіндісінде анықталған және үзіліссіз. Сонда $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ (6).

(6) формула *анықталған интегралда айнымалыны ауыстыру формуласы* деп аталады.

Теорема. *u=u(x)* және *v=v(x)* функцияларының [*a*,*b*] кесіндісінде үзіліссіз туындылары болсын. Сонда $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ (7), мұнда $uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$

.

(7) формула *анықталған интегралдың бөліктеп интегралдау формуласы* деп аталады.

Мысал. $\int_1^e x\ln x dx$ интегралын есепте:

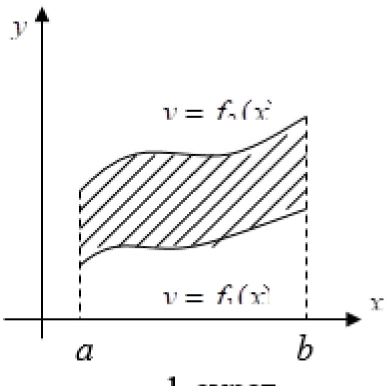
Шешімі: $u=\ln x$, $dv=xdx$. $du=\frac{dx}{x}$, $v=\frac{x^2}{2}$ аламыз

$$\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4},$$ болады

Анықталған интегралдың геометрияда және экономикада қолданылуы.

Егер үзіліссіз қисық тік бұрышты координаталарда $y=f(x)$ ($f(x)\geq 0$) теңдеуімен берілсе, онда осы қисықпен, $x=a$, $x=b$ нүктелеріндегі вертикаль түзулерімен және абсциссалар осінің $a\leq x\leq b$ кесіндісімен шектелген қисық сызықты трапецияның ауданы $S=\int_a^b f(x)dx$ формуламен анықталады (*анықталған интегралдың геометриялық мағынасы*).

Егер S ауданы екі үзіліссіз $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ қисықтармен, мұнда $a\leq x\leq b$ болғанда $f_1(x)\leq f_2(x)$ және $x=a$ және $x=b$ вертикальдарымен шектелген болса, онда $S=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx$ (1сурет).



1-сурет

Мысал. $y=x^2-2x$, $y=4x-x^2$ сызықтармен шектелген фигураның ауданын есептеңіз

Шешімі: Осы теңдеулердің оң жақтарын теңестіре отырып, көрсетілген қисықтардың қиылысу нүктелерінің абсциссаларын табамыз: $x_1=0$, $x_2=3$.

$$S=\int_0^3(4x-x^2-(x^2-2x))dx=\int_0^3(6x-2x^2)dx=\left(3x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^3=9.$$

Сондықтан, $y = f(x) \geq 0$ үзіліссіз қисығымен және $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, $y=0$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапецияның Ox осінен айналуынан пайда болған дененің көлемі мынаған тең: $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$

$x = g(y) \geq 0$ үзіліссіз қисығымен және $y=a$, $y=b$ $(a<b)$, $x=0$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапецияның Oy осінен айналуынан пайда болған дененің көлемі мынаған тең:

$$V = \pi \int\limits_a^b g^2(y)dy.$$

$y = f(x)$ қисығының абсциссалары $x=a$ және $x=b$ болатын нүктелерімен шектелген доғасының ұзындығы l мына формуламен анықталады:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

$y = f(x)$ қисығының абсциссалары $x=a$ және $x=b$ болатын нүктелерімен шектелген бөлігінің Ox осінен айналуынан пайда болған беттің ауданы мына формуламен анықталады: $S_x = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$

Егер $f(t)$ уақыттың t моментіндегі еңбек өнімділігінің өзгерісін сипаттайтын функция болса, онда $[0,T]$ уақыт аралығындағы өндірілген өнім көлемі $Q = \int\limits_0^T f(t)dt$ болады.

Егер Кобба-Дуглас функциясында еңбек шығыны уақытқа сызықты тәуелді, ал капитал шығыны тұрақты деп есептесек, онда

$$Q = \int\limits_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}dt$$

Меншіксіз интегралдар.

Егер $f(x)$ функциясы $x \in [a,+\infty)$ болғанда үзіліссіз болса, онда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *меншіксіз интегралы* деп $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ аталады. Егер бұл шек бар және ақырлы болса, онда интеграл *жинақты* деп аталады. Кері жағдайда интеграл *жинақсыз* болады. $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ және $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ интегралдары да осылайша анықталады:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx; \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx.$$

Мысал. а) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$; б) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ интеградарын есепте

а) $$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}x^{-2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1,$$

яғни меншіксіз интеграл 1-ге жинақталады

б) $$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}x^{-\frac{1}{2}}dx=2\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{b}-1\right)=\infty,$$

1.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Алғашқы функцияның анықтамасын бер.
2. Берілген функцияның анықталмаған интегралы деп не аталады?
3. Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері қандай?
4. Негізгі интегралдардың кестесін жаз.
5. Негізгі интегралдау әдістері қандай?.
6. Айнымалыны ауыстыру арқылы интегралдау әдісінің мағынасы неде?
7. Анықталмаған интегралда бөліктеп интегралдау формуласын жаз.
8. Анықталған интеграл ұғымына келтіретін есеп қандай?
9. $y=f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісінде интегралдық қосындысы деп не аталады?
10.10. $y=f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісінде анықталған интегралы деп не аталады?
11. Анықталған интегралдың негізгі қасиеттерін тұжырымда.
12. Ньютон-Лейбниц формуласын жаз.
13. Анықталған интегралда айнымалыны ауыстыру формуласын жаз.
14. Анықталған интегралда бөліктеп интегралдау формуласын жаз.
15. Анықталған интегралдың геометриялық мағынасы қандай?
16. Тік бұрышты координаталар жүйесінде жазық фигураның ауданы қалай есептеледі?
17. Жазық фигураның Ox осінен айналуынан пайда болған дененің көлемін қалай есептеуге болады?
18. [0,T] уақыт аралығында өндірілген өнім көлемі қалай табылады?
19. Қандай интегралдар меншіксіз деп аталады?
20. Меншіксіз интегралдар қалай есептеледі?
21. Қандай жағдайда меншіксіз интеграл жинақты немесе жинақсыз болады?

1.3 Есептер шығару

1. Анықталмаған интегралды есептеңіз:

1. $\int (6x^2 - 8x + 3)dx$

2. $\int (12x^5 + 8x^3 + 3x - 2)dx$

3. $\int x^2 (x^3 + 1)dx$

4. $\int x^2 (2 + \frac{1}{x})dx$

5. $\int \sqrt{x}(x + 2)dx$

6. $\int \frac{2x^3 + 3x - x\sqrt{x} - 7}{x^2}dx$

7. $\int (10x^4 - 9x^2 + 8x - 3)dx$

8. $\int 3(x + 1)^2 dx$

9. $\int \frac{x + 3}{x}dx$

10. $\int \frac{3x^4 - 5x + 2x\sqrt{x} + 2}{x^2}dx$

11. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}} dx$

2. Анықталмаған интегралды есептеңіз:

1. $\int \frac{dx}{x^6}$ **2.** $\int \frac{dx}{3^2 + x^2}$ **3.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ **4.** $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$ **5.** $\int \frac{5dx}{\sin^2 x}$

3.Анықталмаған интегралды есептеңіз:

1. $\int (\frac{1}{3}x - 1)^2 dx$

2. $\int \frac{x^2 - 1}{x + 1}dx$

3. $\int \frac{\sqrt{x} + 2}{x}dx$

4. $\int (x + \sqrt{x})dx$

4. Анықталмаған интегралды есептеңіз:

1. $\int \cos(2x - 3)dx$ ***2.*** $\int e^{1-2x}dx$ **3.** $\int \frac{dx}{3x + 1}$ **4.** $\int \frac{dx}{2x - 3}$

5. $\int 4e^{4x+1}dx$ ***6.*** $\int \sin(3 - 5x)dx$ ***7.*** $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$

5.Функциялардың анықталмаған интегралын есептеңдер:

1. $y = 8x/(x^2 - 6)$ **2.** $y = 15x^4/(-x^5 + 8)$
3. $y = 4x/(-x^2 - 1)$ **4.** $y = 14x/(-x^2 + 2)$
5. $y = 6 \sin x/(2 \cos x - 7)$ **6.** $y = 12 \sin x/(5 - 4 \cos x)$
7. $y = -30\ e^{x} / (2\ e^{x} + 3)$ **8.** $y = 30\ e^{x}/ (6 - 5\ e^{x})$

6. Берілген түрдегі анықталмаған интегралды есептеңдер:

1. $\int[6 \sin(2x) - 8 \cos(-x/2)]dx$ **2.** $\int[8 \sin(-8x) - 8 \cos(x/8)]dx$
3. $\int[9 \sin(3x) - 3 \cos(-x/3)]dx$ **4.** $\int[-3 \sin(-3x) - 9 \cos(x/3)]dx$

5. $\int[12\sin(-2x) - 2\cos(x/2)]dx$ **6.** $\int[12\sin(4x) + 8\cos(-x/4)]dx$

7. Анықталмаған интегралды есептеңіз:

1. $\int \frac{2x}{x^2-1}dx$ **2.** $\int \frac{x^5dx}{7+x^6}$ ***3.*** $\int \frac{1}{x-2}dx$ ***4.*** $\int \frac{\cos x dx}{3+4\sin x}$

5. $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^3-3x+2}$ **6.** $\int \frac{2}{4x-3}dx$ **7.** $\int \frac{xdx}{2+3x^2}$ **8.** $\int \frac{(x-1)dx}{x^2-2x+7}$

8. Бөліктеп интегралдау әдісі бойынша анықталмаған интегралды есептеңіз:

1. $\int x\cdot\cos x dx$ ***2.*** $\int x^3\ln x dx$ **3.** $\int(3x-2)e^x dx$

4. $\int(4x+1)\cdot e^x dx$ ***5.*** $\int x\cdot\sin(2x-1)dx$ ***6.*** $\int(1-x)\cdot\cos x dx$

7. $\int(7x - 2)\sin x\, dx$ **8.** $\int(4x + 5)\sin x\, dx$ **9.** $\int(9x - 4)\cos x\, dx$

10. $\int(8x + 6)\cos x\, dx$ **11.** $\int(7x - 4)\, e^x\, dx$ **12.** $\int(5x + 1)\, e^x\, dx$

9. Анықталған интегралды есептеңіз:

1. $\int_{-1}^{1}(3x^2+4x)dx$ **2.** $\int_{-1}^{1}(3x^2-5)dx$

3. $\int_{-2}^{0}(3x^2+4x-4)dx$ **4.** $\int_{0}^{2}(3x^2-4x+3)dx$

5. $\int_{-1}^{0}(3x^2+4x+3)dx$ **6.** $\int_{1}^{2}(3x^2+2x-2)dx$

7. $\int_{1}^{2}(3x^2-4x+1)dx$ **8.** $\int_{1}^{2}(6x^2-2x-1)dx$

9. Анықталған интегралды есептеңіз:

1. $\int_{1}^{3}x^2(x-3)dx$ **2.** $\int_{0}^{1}4x^2(x+3)dx$

3. $\int_{0}^{1}x(6x-4)dx$ **4.** $\int_{-1}^{1}3x^2(x-2)dx$

5. $\int_{0}^{2}x\cdot(3+\frac{1}{x})\,dx$ ***6.*** $\int_{1}^{2}\frac{x^2+2x}{x}dx$

7. $\int_{0}^{1}5x\cdot\sqrt{x}\,dx$ ***8.*** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$

9. $\int_{1}^{4} \frac{2dx}{x^2}$

10. $\int_{2}^{4} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} dx$

11. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x - 7)\cos x dx$

12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\cos x)\sin x dx$

10. Анықталған интегралды есептеңіз:

1. $\int_{0}^{1} (-5x^6\sqrt{x} + 4\sqrt{x})dx$

2. $\int_{0}^{1} (5x^6\sqrt{x} - 4\sqrt{x})dx$

3. $\int_{0}^{1} (2 + 5x^6)\sqrt{x}dx$

4. $\int_{0}^{1} (3x^3 + 8)\sqrt{x}dx$

11. Анықталған интегралды есептеңіз (айнымалыны ауыстыру әдісі):

1. $\int_{3}^{5} \frac{dx}{x-1}$

2. $\int_{1}^{3} e^{x-1}dx$

3. $\int_{0}^{1} e^{3x}dx$

4. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{3x-5}}$

5. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{3x+1}$

6. $\int_{1}^{3} \frac{dx}{(2x-1)^2}$

13. Анықталған интегралды есептеңіз (бөліктеп интегралдау әдісі):

1. $\int_{1}^{e} (4\ln x - 7)\frac{dx}{x}$

2. $\int_{1}^{e} (2\ln x - 5)\frac{dx}{x}$

3. $\int_{1}^{e} \frac{1 + 6\ln x}{x} dx$

4. $\int_{1}^{e} \frac{8\ln x - 7}{x} dx$

5. $\int_{-1}^{6} x \cdot e^{6-x} dx$

6. $\int_{1}^{-4} e^{4+x} \cdot xdx$

7. $\int_{2}^{4} e^{\frac{x}{2}-2} \cdot xdx$

8. $\int_{5}^{10} x \cdot e^{-2+\frac{x}{5}} dx$

14.Меншіксіз интегралды есептеңіз:

1. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

2. $\int_{1}^{\infty} \frac{6dx}{x^4}$

3. $\int_{2}^{+\infty} (2x+5)dx$

4. $\int_{4}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

5. $\int_{1}^{+\infty} \frac{6\,dx}{(2x+1)^2}$

6. $\int_{0}^{+\infty} \frac{10\,dx}{(5x+4)^2}$

Қортынды

Математика көптеген экономикалық теориялар мен модельдердің негізінде жатқан іргелі ғылым болып табылады. Математикалық әдістерді және олардың қолданылуын терең түсінбей, экономикалық деректерді тиімді талдау, нарықтың дамуын болжау, бизнес-процестерді оңтайландыру және негізделген басқарушылық шешімдер қабылдау мүмкін емес.

Экономикадағы математика бойынша оқу-әдістемелік құрал студенттердің математикалық әдістер мен олардың экономикалық қызметте қолданылуы туралы терең және жан-жақты білім алуына бағытталған. Бұл құралда қарастырылған тақырыптар математикалық концепциялардың кең ауқымын қамтиды, қарапайым арифметикалық операциялардан бастап, экономикалық деректерді талдау және шешім қабылдау үшін қажетті күрделі модельдер мен алгоритмдерге дейін.

Құралдың негізгі мақсаты – студенттердің экономикалық процестерді математикалық модельдеу дағдыларын, сондай-ақ математикалық әдістерді экономикадағы практикалық міндеттерді шешуде қолдану қабілетін дамыту. Құрал жүйелі ойлау мен аналитикалық қабілеттерді қалыптастыруға көмектеседі, олар қазіргі экономиканың жағдайында табысты кәсіби қызмет үшін қажет.

Құралға енгізілген практикалық тапсырмалар мен мысалдар теориялық білімді бекітуге және практикалық дағдыларды дамытуға ықпал етеді, бұл экономикалық профильдегі мамандарды дайындауда маңызды элемент болып табылады.

Экономикадағы математика оқу-әдістемелік құралы студенттердің математикалық сауаттылығын арттыруға және оларды экономикалық саладағы табысты мансапқа дайындауға ықпал ететін құнды оқу ресурсы болып табылады. Экономика және басқару саласындағы мамандарды дайындайтын жоғары оқу орындарының оқу процесінде пайдалануға ұсынылады.

Пайдаланылған әдебиет

1 Берденова Г. Ж. Математика 1: Оқу-әдістемелік құрал. – Костанай: А. Байтурсынов атындағы ҚМУ, 2018. – 188 б.
2 Беркімбай Р.Ә. Экономикадағы математика пәнінің Сызықтық алгебра бөлімі бойынша 5B050900-Қаржы, 5B050800 – Есеп және аудит, 5B050600 – Экономика, 5B051000- Мемлекеттік және жергілікті басқару мамандықтарының 1 курс студенттеріне арналған әдістемелік оқу құралы – Қостанай: А.Байтурсынов атындағы ҚМУ, 2011– 84 б.
3 Берденова Г.Ж. Математика 2: Оқу-әдістемелік құрал.– Костанай: А. Байтурсынов атындағы ҚМУ, 2019. – 76 б.
4 Майер Ф.Ф., Утемисова А.А. Математика в экономике. Учебное пособие. – Костанай, 2018. – 172 с.
5 Қазешев А.Қ., Нурпеисов С.А. Экономистерге арналған математика. – Алматы: «Экономика» баспасы, 2013. – 472 бет.
6 Қазешев А.Қ., Нурпеисов С.А. Сборник задач по высшей математике для экономических специальностей. – Алматы: «Ғылым» баспасы, 2012.
7 Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. - М.: “Банки и биржи”, 2007г. – 481с.
8 Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. – Москва: Издательство "Дело", 2016г.– 681 с.
9 Айдос Е.Ж. Жоғары математика, 1-3 т., А.,«Бастау», 2008. – 534 б.
10 Саханов Н., Жаңбырбаев Б. Жоғары математика, А., «Қайнар», 1993.- 315 б.
11 Т.Бұлабаев, Ғ.Матақаева, Математикалық талдау негіздері, А., «Қайнар», 1996.– 275 б.